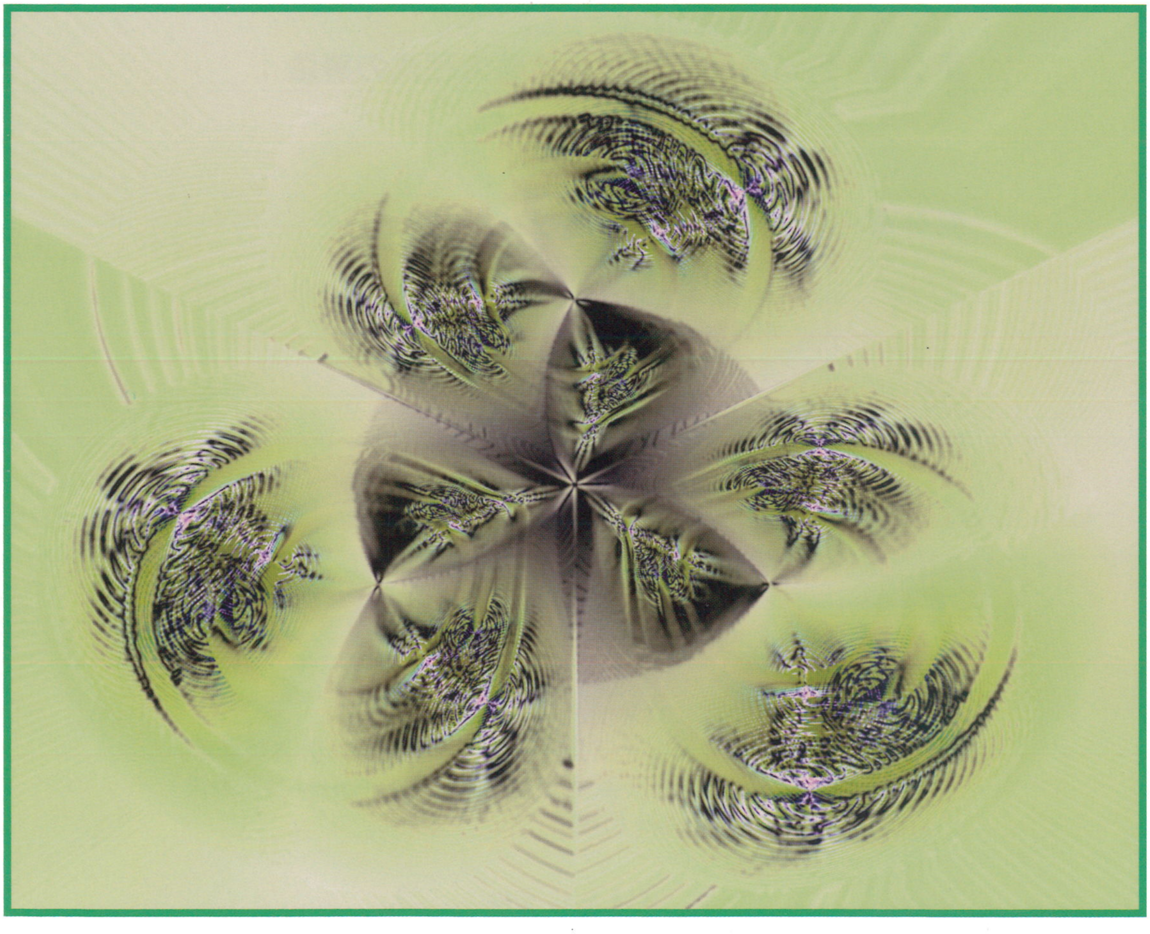
昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2008年4月1日発行　第46巻4号　毎月1回1日発行
ISSN 0386―2240

数理科学

4
2008

特集 現代数学はいかに使われているか［解析編］



No.538
サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 538 April 2008

現代数学はいかに使われているか ［解析編］

表紙：戸川　隼人

数理科学特集一覧

MATHEMATICAL SCIENCES
April 2008 Number 538

特集／現代数学はいかに使われているか［解析編］

解析学はいかに使われているか

柴田 良弘

「自然の書物は数学の言語によって書かれている」とはイタリアの科学者ガリレオ・ガリレイの言葉であった．現在身の回りを見渡し，自然界のみならず人間の作り出す機械その他の文明の利器，経済などの人間の社会活動，人間自身を含む生命科学などその背後に数理的な法則を見出し理解しようとするとき，数学解析はその基本言語として登場する．実際ガリレオ・ガリレイの等加速度運動の偉大な発見を契機とし，ニュートン，ライプニッツによる具体的な数学言語（微積分学）の発明の後，基本原理（例えば古典物理のニュートンの3法則）をもとに微分方程式をたて，この方程式を解くことにより近似的にでも現象を理解しようという方法が確立された．この方法論はその適用範囲を益々広げ，人間の理解は飛躍的に発展し今も発展し続けている．そしてその中核をなす数学解析もまたその応用との相互作用により現在も発展し続けその内容は多岐にわたる．この特集によって時代の最先端を行く数学解析のバラエティに富んだ内容を垣間見ることができる．

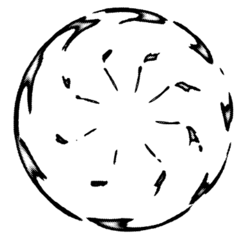
方程式を近似的にでも解くということは上に述べた方法論の中でも最も重要な部分である．現在は計算機科学の飛躍的な発展により解ける方程式の範囲も飛躍的に広がっている．しかしこの計算機ももとはイギリスの数学者チューリングやハンガリーの数学者フォン・ノイマンの人間の思考を機械にやらせたいというアイデア（夢）がその発端となっている．人間の思考が言語に基づいているのならば，それを機械化するための数学が必要となる．それは現在数学基礎論と呼ばれる分野の中の一テーマである．

数学それ自身に限れば，時には周りをとりまく環境を忘れ数学それ自身に特化した純粋な数学的アイデアから出発し，それは周りの人からは何を考えているのか分からない，または無意味にも思えることが多いのであるが，数学それ自身の発展に没頭することも大事である．例えば1920年から30年代にかけてポーランド国のステファン・バナッハを中心とした関数解析の発展などは当時発展していた量子力学などと無関係ではなかったにしろ，純粋に数学それ自身の発展と言える．しかし現在関数解析なしには数学や計算機科学は勿論のこと，微分方程式を記述言語とするあらゆる科学を理解することは不可能である．

数学解析の発展は応用分野のイノベーションに貢献する．また応用分野における新しい疑問は，これを解決するための新しい数学解析の誕生のきっかけとなる．このように常に数学それ自身とその応用が車の両輪のように働きお互いの発展に寄与することが現在まで行われ，またこれからも行われていく重要なサイクルである．読者の方々がこの特集により数学解析の一端を垣間見られ，興味をもたれれば幸いである．

（しばた・よしひろ，早稲田大学理工学術院）

変分原理・変分法・変分問題



立川　篤

1. 変分原理・変分法・変分問題

変分原理もしくは変分法について語るとき，最もよく挙げられる例の一つは恐らく石鹸膜であろう．針金で枠を作り石鹸水に入れて取り出すと膜が張れる．その膜は，張力の影響で，針金によって与えられた枠を境界として持つような曲面のうち，面積が最小となるものとなる．このようにある「量」（この例の場合は面積）を最小とするように，ある現象が起こるとき，その現象は「**変分原理**に従っている」という言い方をする．ここで言う「量」は，関数や写像のなす集合の上で定義された関数として表され，これらは**汎関数**と呼ばれる．数学の問題として，汎関数の極値を与える関数・写像を求める問題を**変分問題**と総称し，変分問題を研究する数学の分野を**変分法**と呼ぶ．高校数学では関数の極値を求める問題を扱うが，この「極値を求める」ことを関数や写像の集合上で行うのが変分問題であると言える．

近代的な変分法の思想的ルーツは，ライプニッツの哲学にある「可能な世界の中で最善のものを神は選択している」という考え方の中に見出すことができる．その後，モーペルテュイの「最小作用の原理」により，あらゆる現象を説明する一般的な原理として，今日で言う「変分原理」の原型とも呼ぶべきものが提唱された．さらにヨハンとヤコブのベルヌーイ兄弟，オイラー，ラグランジュ等により数学的な基礎が築かれた．余談ながら，よく日常会話で使う「予定調和」という言葉もライプニッツの哲学の中に現れる概念だと言う．普通我々が気軽に使う「予定調和」とは，せいぜい「ドラマ・水戸黄門では，必ず最後に格さんが印籠を出して，悪者がひれ伏す」といった程度のことを指すことが多いが，本来の意味はずいぶんと深い．ちなみに，水戸黄門は 1628 年，ライプニッツは 1646 年，ともに 7 月生まれである．「水戸黄門」や「暴れん坊将軍」の時代にかけて変分法の基礎は作られていったのである．

2. 最短線

変分問題の最も簡単な例は，恐らく

> **問題 1.** 2 点 P, Q を結ぶ最短線を求めよ．

というものであろう．ユークリッド空間内で考えれば，答えは誰でも知っている通り直線である．実際，これを数学的に示してみよう．空間の次元は 3 としておく（次元が一般の n でも全く同様である）．3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 内の曲線 $u(t) = (u^1(t), u^2(t), u^3(t))\quad (0 \le t \le 1)$ の長さを $l(u)$ とおく．この l は，$\mathbb{R}^3$ 内の曲線のなす集合上で定義された関数である．さらに，曲線を上のように表すことにしておけば，各曲線は閉区間 $[0,1]$ 上で定義され $\mathbb{R}^3$ に値を持つ関数と同一視できる．ここでは微分可能な関数のみを扱うこととし，$[0,1]$ から $\mathbb{R}^3$ への微分可能な関数全体を，

$D([0,1],\mathbb{R}^3)$ とおこう．l は $D([0,1],\mathbb{R}^3)$ 上で定義された汎関数と見なせる．今，各 u^i $(i=1,2,3)$ の t に関する微分を $\dot{u}^i$ と書き，さらに

$$\|\dot{u}(t)\| = \Big(\sum_{i=1}^{3}(\dot{u}^i(t))^2\Big)^{1/2}$$

と書くことにすると，u の長さ $l(u)$ は

$$l(u) = \int_0^1 \|\dot{u}(t)\|dt \tag{1}$$

で与えられる．また，与えられた2点 $\mathrm{P}(p^1,p^2,p^3)$，$\mathrm{Q}(q^1,q^2,q^3)$ を結ぶという条件は

$$\begin{cases} u^i(0)=p^i, & i=1,2,3, \\ u^i(1)=q^i, & i=1,2,3, \end{cases} \tag{2}$$

と書ける．さて，写像 $u\in D([0,1],\mathbb{R}^3)$ で特に上の条件 (2) を満たすもの全体を $D_{\mathrm{P,Q}}$ と書こう．「P と Q とを結ぶ最短線を求めよ」という問題は「$D_{\mathrm{P,Q}}$ の元で，l を最小にするものを求めよ.」と表される．

さて，この問題をどのように扱うか？ 高校数学で，ある関数の「最小値を求めよ」という問題が出たら，とりあえず微分して，微分が 0 となる点を求めることであろう．ここでも同じ発想をしてみよう．とはいえ，「$D_{\mathrm{P,Q}}$ で汎関数を微分せよ」といきなり考えると，「関数空間上での微分」などという難しいことを考えねばならない．そこで，考え方を少し変え，「なぜ，最小値では微分が 0 となったか」を思い出してみよう．例えば，関数 $f(x)$ が $x=x_0$ で最小値を持つとする．すると，任意の $\varepsilon>0$ に対して，$f(x_0)\le f(x_0\pm\varepsilon)$ となり，この不等式と微分の定義から $f'(x_0)=0$ が導かれるのであった．これのアナロジーを考えよう．u_0 が求める最短線に対応するものだとする．両端点が原点となる曲線，すなわち $t=0,1$ で $(0,0,0)$ となる $D([0,1],\mathbb{R}^3)$ の元全体を $D_{\mathrm{O,O}}$ と書くことにすると，任意の $\varphi\in D_{\mathrm{O,O}}$ と $\varepsilon>0$ に対して，$u_0\pm\varepsilon\varphi\in D_{\mathrm{P,Q}}$ となり（図 1），$l(u_0)$ の最小性より，$l(u_0)\le l(u_0\pm\varepsilon\varphi)$ となる．今，$\varphi\in D_{\mathrm{O,O}}$ を固定して，

$$L(\varepsilon)=l(u_0+\varepsilon\varphi)$$

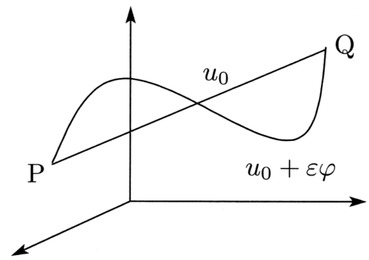


図 1　最短線 u_0.

とおこう．すると，$L(\varepsilon)$ は ε の関数で，$\varepsilon=0$ で最小値をとる．

ここで，少し楽観的に考えて（数学では「楽観的に考える」ことは，しばしば，非常に重要である！），L が微分可能であるとしよう．前に述べた高校数学のアナロジーから，

$$\frac{dL}{d\varepsilon}(0)=0 \tag{3}$$

となることが分かる．さらに，$d/d\varepsilon$ を l を定義する積分の中に入れて（こんなことやって大丈夫かどうかは気にしないことにしよう）計算し，この (3) から何が出てくるか見てみよう．

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dL}{d\varepsilon}(0) = \int_0^1 \frac{d}{d\varepsilon}\|\dot{u}^i+\varepsilon\dot{\varphi}^i\|dt\Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^{3}\frac{\dot{u}^i\dot{\varphi}^i}{\|\dot{u}\|}dt \end{aligned} \tag{4}$$

を得る．これをさらに部分積分すれば

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{3}\frac{\dot{u}^i}{\|\dot{u}\|}\varphi^i(t)\Big|_{t=0}^{t=1} \\ &\quad + \int_0^1 \sum_{i=1}^{3}\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{u}^i}{\|\dot{u}\|}\right)\cdot\varphi^i(t)dt \end{aligned} \tag{5}$$

となる．ここで，φ の各成分は $t=0,1$ で 0 となることに注意すれば，上の (5) の右辺第一項は 0 となり，

$$0=\int_0^1 \sum_{i=1}^{3}\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{u}^i}{\|\dot{u}\|}\right)\cdot\varphi^i(t)dt \tag{6}$$

という方程式を得る．この式が，「両端点 $t=0,1$ で $(0,0,0)$ となる」という以外に特別な条件を課されていない任意の滑らかな関数 $\varphi(t)=$

$(\varphi^1(t), \varphi^2(t), \varphi^3(t))$ に対して成り立っていることに注意すれば（ここも少し大雑把に考えて），

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{u}^i}{\|\dot{u}\|}\right) = 0, \quad (i = 1, 2, 3) \tag{7}$$

となっていなければならないことが分かる．すなわち，(7) こそ最短線が満たすべき方程式である．この方程式は，接ベクトルの長さに対する各成分の比が t に依らない，すなわち接線の方向が一定であることを示しているので，この方程式を満たすものは直線に他ならない．かくして，最短線が直線であるという当り前の事実を確かめることができた．

3. 石鹸膜

本稿の初めのほうでも述べたように，石鹸膜はその張力の作用で，面積が最小となるように張られ，まさに，「変分原理に支配された」形状となる．ここでは $\mathbb{R}^2$ の領域 Ω で定義された関数 $u^3 = f(u^1, u^2)$ のグラフで表される $\mathbb{R}^3$ 内の曲面の面積について考える．以下，u^i に関する偏微分を D_i と表し，さらに，$\|Df\|^2 = (D_1 f)^2 + (D_2 f)^2$ と書くことにすると，面積は，

$$S(f) = \int_\Omega \sqrt{1 + \|Df\|^2} du^1 du^2 \tag{8}$$

により与えられる．石鹸膜を考えるとき，「枠」が針金等で作られていて固定されている例を考えるのが最も簡単である．「枠」が与えられるというのは，Ω の境界 $\partial\Omega$ 上での値，境界条件が与えられていることに対応する[*1]．この境界条件を g と書くことにすると，ここで考える問題は次のように表せる．

問題 2. $\Omega \in \mathbb{R}^2$ 上で定義され $f|_{\partial\Omega} = g|_{\partial\Omega}$ を満たす関数 f の中で，$S(f)$ を最小とするものを求めよ．

*1) 厳密に考えると，針金には太さがあり，さらに石鹸膜は針金にガッチリくっついているわけではなく，その上で自由に動けるので，ここで考える境界条件とはいささか異なる．ここでは話を簡単にするため，境界上での形が与えられていると考える．

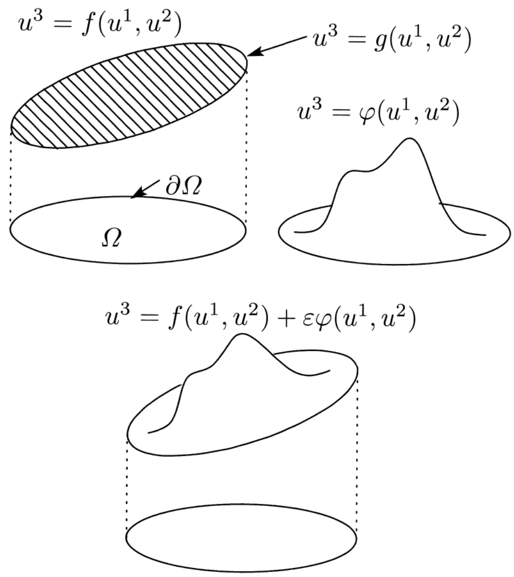


図 2　極小曲面 f.

$S(f)$ に対して先ほどと同じように話を進めてみよう．f が面積最小の曲面を与えるとして，それを変化させた $f + \varepsilon\varphi$ を考える．図 2 は，境界条件が単純な平面曲線となる場合の大体のイメージである．

曲面 $u^3 = f + \varepsilon\varphi$ の面積を

$$s(\varepsilon) = S(f + \varepsilon\varphi)$$

とおく．$s(\varepsilon)$ の $\varepsilon = 0$ における微分が 0 となることから f の満たすべき方程式を導けば，それが石鹸膜の満たすべき方程式となる．

先ほどと同様に，$0 = ds(\varepsilon)/d\varepsilon|_{\varepsilon=0}$ とおくと，

$$0 = \int_\Omega \sum_{i=1}^{2} \frac{D_i f D_i \varphi}{\sqrt{1 + \|Df\|^2}} du^1 du^2 \tag{9}$$

となる．さて，この (9) から，f の満たすべき方程式を導きたいのだが，先ほどの例のように一変数ではないので，簡単に高校レベルの数学の部分積分を使って (4) から (6) を求めたようには，話は進まない．

最短線の例でうまくいった理由は，区間 $[0, 1]$ で定義された 2 つの関数 $\psi(t)$ と $F(t)$ のどちらか一方が両端点で 0 となっていれば，部分積分を用いて，

$$\int_0^1 F \cdot \frac{d\psi}{dt} dt = -\int_0^1 \frac{dF}{dt} \cdot \psi dt \qquad (10)$$

となることであった．最短線の例では，両端点を固定したまま変化させたので，変化を与える関数 φ^i は $t = 0, 1$ で 0 となるものを考えていた．そのおかげで，(10) が使えたわけである．今考えている例ではどうであろうか？ 境界条件 $f|_{\partial\Omega} = g|_{\partial\Omega}$ の下で考えているので，境界上での値を変えないような φ でなければならず，φ の満たすべき条件は，境界上で 0 となることである．これはちょうど「両端点で 0 となる」の多変数版であり，(10) に対応する関係が成り立つであろうと期待するのが人情である．実際，それが成り立つことを示そう．

その前に，また少し記号を導入したい．$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を有界な開集合*2)とし，関数 $\psi : \Omega \to \mathbb{R}$ に対して「f の台」，supp ψ を

$$\mathrm{supp}\ \psi := \overline{\{u = (u^1, u^2) \in \Omega\ ;\ \psi(u) \neq 0\}}$$

と定義する．ただし，ある集合 A に対して $\overline{A}$ は A の閉包*3)を表す．次に，開集合 Ω 上で定義された k 回偏微分可能で k 次偏導関数がすべて Ω 上で連続なもの全体を $C^k(\Omega)$ で表し，さらに

$$C_0^k = \{\psi \in C^k(\Omega)\ ;\ \mathrm{supp}\ \psi \subset \Omega\}$$

とおく．さらに，今後は du^1du^2 を単に du とも書くことにする．

補題 1. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を有界開集合とし，$\psi \in C_0^1(\Omega)$ とする．このとき，

$$\int_\Omega D_i\psi(u)du = 0, \quad i = 1, 2 \qquad (11)$$

が成り立つ．

証明： $i = 1$ の場合を示す．ψ の値を Ω の外では 0 とおくことで，$\mathbb{R}^2$ 全体で定義された関数に拡張しておく．Ω は有界と仮定しているので，原点を中心とする十分大きな正方形 $Q_R =$

*2) この言葉をご存じない方は，「境界上の点を全く含まない集合」と解釈して下さい．対をなす言葉「閉集合」は「境界上の点をすべて含む集合」を表します．また次の「閉包」とともに，あまり気にせず読んでも大丈夫です．

*3) 集合 A に A の境界 ∂A を付け加えた集合．

$\{(u^1, u^2)\ ;\ |u^i| \leq R, i = 1, 2\}$ に対して $\Omega \subset Q_R$ となる．ψ を Ω の外では 0 としていることに注意すると

$$\int_\Omega D_1\psi du = \int_{Q_R} D_1\psi du^1 du^2$$
$$= \int_{-R}^{R} \left\{ \int_{-R}^{R} D_1\psi du^1 \right\} du^2$$
$$= \int_{-R}^{R} \{\psi(R, u^2) - \psi(-R, u^2)\} du^2$$
$$= 0$$

となる． □

この補題を $F \in C^1(\Omega)$ と $\psi \in C_0^1(\Omega)$ との積に対して用いれば，

$$0 = \int_\Omega D_i(F\psi)du$$
$$= \int_\Omega (D_iF) \cdot \psi du + \int_\Omega F \cdot D_i\psi du$$

となり，これより直ちに，(10) の多変数版

$$\int_\Omega F \cdot D_i\psi du = -\int_\Omega (D_iF) \cdot \psi du \quad (12)$$

が成り立つことが分かる．これを (9) に用いると，

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{2} D_i \left\{ \frac{D_i f}{\sqrt{1 + \|Df\|^2}} \right\} \varphi du = 0$$

を得る．これが任意の $\varphi \in C_0^1(\Omega)$ に対して成り立つことより，f の満たすべき方程式が

$$\sum_{i=1}^{2} D_i \left\{ \frac{D_i f}{\sqrt{1 + \|Df\|^2}} \right\} = 0 \quad (13)$$

であることが分かる．この (13) は**極小曲面の方程式**，さらにこの方程式を満たす曲面は**極小曲面**と呼ばれている．極小曲面の方程式は先に挙げた方程式 (7) によく似ており，平面を表す関数は (13) の解となる．従って，図 2 のように境界条件が平面曲線の場合は，その曲線で囲まれた平面図形が問題 2 の解である．しかし，境界条件が平面曲線でない（従って，平面図形はその境界条件を満たせない）一般の場合に対して解く*4)のは容易ではなく，実際，多くの著名な数学者たちのチャレンジの対象となっていた．方程式そのものの扱いに関しては，文献 2) に詳しく紹介されている．特にこの問題に大きく貢献した文献もそこで見つけることができる．また，極小曲面は建築等にも応用されており，実際，文献 4) には，建築家フライ・オットーによる極小曲面を利用した美しい建物の写真が紹介されている．

極小曲面の問題はここで述べたような単純な問題設定の場合に対しては解決されてしまっていると言ってよいが，一般化された問題設定の下で今日でも盛んに研究されている．

*4) ここで言う「解く」とは，「不自然な付帯条件のない，十分に一般的な条件下で，解の存在が示された」ということであり，「解を式で書き表せる」ことまでは意味していない．

4. 数学的定式化，オイラー・ラグランジュ方程式，直接法

変分問題は，おおまかに言って，数学的には次のように定式化される．

> **問題 3.** 対象とする関数（もしくは写像）全体のなす集合を X とし，$\mathcal{F}$ を X 上で定義された汎関数とする．$\mathcal{F}$ の極値を与える元 $u_0 \in X$ を求めよ．

上で述べた変分問題の解の存在を示すには，これまでの例で述べてきた方法を一般化して，次のように考えていけばよい．

1. $u \in X$ に対して，少なくとも $|\varepsilon|$ が十分小さいとき，$u + \varepsilon\varphi \in X$ となるような φ を考え，そのような φ 全体のなす集合を X_0 とおく．
2. u_0 が $\mathcal{F}$ の極値を与えるとすると，
$$\left. \frac{d\mathcal{F}(u_0 + \varepsilon\varphi)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0 \quad (14)$$
を満たす．
3. 上の (14) が任意の $\varphi \in X_0$ に対して成り立つことより，先の補題 1 等を用いて，u_0 の満たすべき方程式を求め，それを解く．

この (14) から得られる微分方程式はオイラー・ラグランジュ方程式と総称される．(7), (13) はそれぞれオイラー・ラグランジュ方程式の例である．

一般に，面白い問題のオイラー・ラグランジュ方程式は非線形方程式となることが多く，簡単には解けない．

さて次に，**直接法**と呼ばれる方法について述べたい．直接法とは最小値を与える写像，**最小点**の存在を，文字通り「直接」示す方法である．問題3で考えた汎関数 $\mathcal{F}(u)$ が X 上で下から有界，すなわち

$$m=\inf_{u\in X}\mathcal{F}(u)$$

が有限値として定まるとする．すると下限 inf の定義より，X の元からなる列 $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ で，

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{F}(u_n)=m \tag{15}$$

となるものが存在する．これを**最小列**と呼ぶ．ここで，次の2つを仮定しよう．

(A1) $\mathcal{F}(u_n)\leq M$ が n に関係しない M に対して成り立つとき，$\{u_n\}$ の部分列 $\{u_{n_k}\}$ である $u_0\in X$ に「収束」するものがとれる．

(A2) $\mathcal{F}$ が X で下半連続．すなわち，

$$\lim_{u\to u_0}\mathcal{F}(u)\geq\mathcal{F}(u_0)$$

が成り立つ．

この2つが成り立つとすると，(A1) より，最小列 $\{u_n\}$ の部分列 $\{u_{n_k}\}$ で，ある $u_0\in X$ に収束するものが存在し，さらに，(A2) より，$\mathcal{F}(u_0)\leq\lim_{k\to\infty}\mathcal{F}(u_{n_k})$ となる．さらに，(15) より，$\mathcal{F}(u_0)\leq m=\inf_{u\in X}\mathcal{F}(u)$ となる．しかし，$u_0\in X$ なので，$\mathcal{F}(u_0)\geq\inf_{u\in X}\mathcal{F}(u)$ でなければならず，結論として $\mathcal{F}(u_0)=\inf_{u\in X}\mathcal{F}(u)$，すなわち，$u_0$ が求める最小点であることが分かる．要するに，(A1), (A2) が成り立てば，最小点の存在は直ちに示せたことになる．このような方法を直接法と呼んでいる．ここで問題なのは，(A1), (A2) を満たすような X とそこでの収束の定義をうまく選ぶことである．X としては，極小曲面の問題では有界変動関数のなす空間 (BV)，その他の多くの問題ではソボレフ空間と呼ばれる空間が，また収束としては弱収束と呼ばれるものが選ばれることが多い．これらの空間や収束の定義を述べる余裕はないので，省略させて頂くが，いずれの空間の元も古典的な意味（大学1, 2年次で習う意味）での偏微分可能性はおろか連続性すら保証されない．つまり，とんでもなく変な関数・写像を解として見つけている可能性があり，これでは問題の適切な解を求めたとは言えない．例えば，最短線を求める問題で，途中で切れている線が解として出てきたり，極小曲面を求める問題で裂け目のある曲面が「解」だと言われても納得できないであろう．そこで，次なる問題として，直接法で見つかった解の連続性や微分可能性を示す問題が生じる．これは**正則性の問題**[*5)]と総称され，多くの問題が今日でも残されている．さらに，問題によっては，そもそも特異点があることが自然な場合もあり，そのような問題に対しては，特異点の状況を知ることも重要な問題として浮上してくる．このように次々に問題が浮上してくることは，実生活では困ったことであるが，数学研究の場では有り難いことである．

5. 文献紹介

最後に，変分原理・変分問題関係の文献をいくつかご紹介して，拙稿の終わりとしたい．

まず，どの分野の方にも一度は目を通して頂きたいのは，文献4) である．変分法の歴史的背景，重要な例を多くの美しい図版とともに解説し，その深遠さに触れさせてくれる素晴らしい啓蒙書である．著名な数学者が執筆したもので，数学的記述も正確である．さらに，一般向けの本としては，高校数学を前提に平易な書き方がされている文献7) にも多くの基本的な例が取り上げられていて興味深い．

一方，数学系学科の学生・院生向けの入門書としては，文献5) の後半部分を挙げておきたい．ただし，この本は同じ初版でも第3刷以降ではかな

*5) 正則性の問題はオイラー・ラグランジュ方程式さらには一般の偏微分方程式を扱う上でも，大きな障害となって立ちはだかることが多い．

りの改訂があることに注意しなければならない．

変分問題を本格的に勉強しようという場合には，存在定理，正則性問題について丁寧に解説してありスタンダードなテキストとして推薦したい文献3)や，あらゆることが載っている文献1)がある．文献1)は質・量ともに大変なもので，冒頭からまじめに読んでいったらそれだけで一生が終わってしまいそうな気もするが，傍らにおいておくと辞書代わりに大変重宝する．「必読」とはとても言えないが，研究者にとっては「必携」と言っても過言ではなかろう．

変分問題の中で，盛んに研究されている分野の一つとして，微分幾何学と関連した諸問題が挙げられる．ここでも取り上げた極小曲面もその例であり，他にも調和写像，山辺の問題等がある．特に調和写像については，日本語で書かれた2つの優れた文献6,9)があり，どちらも入門者でも読めるよう配慮されている．

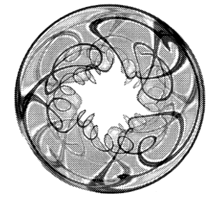
さらに，やはりここでは全く触れることができなかった重要なテーマにハミルトン系があるが，これに関する話題は文献8)で詳しく扱われている．

参考文献

1) M. Giaquinta and S. Hildebrandt, *Calculus of Variations I, II, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, **310**, **311**, Springer–Verlag (1996).
2) D. Gilbarg, N. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, **224**, Springer–Verlag (1977, Second edition 1994).
3) E. Giusti, *Direct Methods in the Calculus of Variations*, World Scientific, 2003.
4) ステファン・ヒルデブラント，アンソニー・トロンバ (S. Hildebrandt, A. Tromba)：(小川・神志那・平田訳)，『形の法則—自然界の形とパターン—』，東京化学同人 (1994).
5) ユルゲン・ヨスト (J. Jost)：(小谷訳)，『ポストモダン解析学』，シュプリンガー・ジャパン (2000).
6) 西川青季：『幾何学的変分問題』，岩波書店 (2006).
7) 高桑昇一郎：『微分方程式と変分法—微分積分で見えるいろいろな現象』，共立出版 (2003).
8) 田中和永：『非線形問題 2』，岩波講座 現代数学の展開，岩波書店 (2000).
9) 浦川　肇：『変分法と調和写像』，裳華房 (1990).

(たちかわ・あつし，東京理科大学理工学部)

ウェーブレット解析



立澤 一哉

1. はじめに

複雑なものを細かく分解し調べるということは，解析の本来の意味である．この場合分解した各部分は，分かり易いものになっていることが望ましい．

さて関数 $f(x)$ が与えられたとして，この関数を分解することを考える．このときどのように分解すれば，関数をうまく表現することができるであろうか？ もちろんこのような問題を考えるときは，関数のどのような情報を取り出したいかということを明らかにする必要がある．その目的により，分解の仕方は変わってくるであろう．

関数を分解する一つの分かり易いやり方は，適当な関数系を用いるというものである．例えば実数全体の集合 $\mathbb{R}$ 上の 2 乗可積分関数すなわち

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx < \infty$$

となる関数 $f(x)$ 全体の成す空間 $L^2(\mathbb{R})$ を考え，$L^2(\mathbb{R})$ における一つの完全正規直交系 $\{e_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ を考える．このとき $L^2(\mathbb{R})$ に属する関数 $f(x)$ は，

$$f(x) = c_1e_1(x) + c_2e_2(x) + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} c_ie_i(x)$$

と分解される．ここで $\{c_i\}_{i=1}^{\infty}$ は $f(x)$ を展開したときの係数である．この係数 $\{c_i\}$ は $f(x)$ により一意に決まるので，いわばこの係数は関数系 $\{e_i(x)\}$ による $f(x)$ の表現であると考えることができる．このときこの係数 $\{c_i\}$ は $f(x)$ の局所的な性質を効果的に表しているであろうか？

例えば関数 $f(x)$ が $x = a$ の周りに局在しているようなものであるとき，この $f(x)$ の関数系 $\{e_i(x)\}$ による展開係数 $\{c_i\}$ を見て，もとの $f(x)$ が局在している $x = a$ という点が分かるであろうか？

もちろん一般論として，$f(x)$ の情報は係数 $\{c_i\}$ を見れば分かるはずであるが，$f(x)$ の局所的な情報が効果的に分かる形で係数に現れていることが望ましい．このようなことをある程度可能にするのが，ウェーブレット関数系である．このウェーブレット関数系は，$\mathbb{Z}$ を整数全体の集合として，完全正規直交系

$$\{\, \psi_{j,k}(x) \,:\, j,k \in \mathbb{Z}\}$$

という形で与えられ，各 $\psi_{j,k}(x)$ は局在している波，すなわち“さざ波（ウェーブレット）”になっている．このウェーブレットについて説明する前に，次節においてフーリエ級数について説明する．

2. フーリエ級数

$f(x)$ を周期 2π をもつ関数とするとき，この関数の振動数の情報を取り出すために，フーリエ級数による分解が用いられる．すなわち

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx, \quad (n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx, \quad (n=1,2,\cdots)$$

とおくと，$f(x)$ に関する適当な条件の下で，等式

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x \\ &\quad + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \cdots \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos nx + b_n \sin nx\} \end{aligned}$$

が成り立つ．

このフーリエ級数による関数の分解は，関数 $f(x)$ を $\cos nx$, $\sin nx$ という単振動に分解していることになる．そして各係数 a_n, b_n が，関数 $f(x)$ の振動数 $n/(2\pi)$ に対応する振動成分を表すことになる．

フーリエ級数は熱方程式を解くためにフーリエにより考え出されたものだが，その後純粋数学の様々な分野に応用された．また信号解析や画像解析においても，基本的に重要な役割を果たす．

ここで $\mathbb{R}$ 上の周期 2π をもつ関数 $f(x)$ で，

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx < \infty$$

となるもの全体を $L^2(-\pi, \pi)$ と書くことにすると，この空間において関数の集合

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \ \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \ \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \ : \ n = 1, 2, \cdots \right\}$$

が完全正規直交系であることが示される．上のフーリエ級数展開は，これによる関数の展開であり，空間 $L^2(-\pi, \pi)$ において収束する．

一方各点 x に対し，フーリエ級数が $f(x)$ に収束するかどうかということは，フーリエ以来の懸案の問題であった．連続的微分可能な関数のフーリエ級数は，各点でもとの関数に収束することは19世紀から知られていたが，どこまで関数についての条件を緩めることができるか，ということは大きな問題であった．例えば関数が連続であるというだけでは，不十分であることが知られている．実際デュボア・レイモンは，連続関数であって，そのフーリエ級数が，ある点でもとの関数の値に収束しないような例を発見した．

このようなフーリエ級数の収束問題は，その難しさにより，長年にわたって様々な数学的概念を生み出してきた．例えばより一般的な関数のフーリエ級数を考えるためには，フーリエ係数を定める積分の意味を明確にしなくてはならない．このことからリーマンは，リーマン積分の定義を考えた．またフーリエ級数が収束するような点の集合はどのようなものかという研究が，カントルの集合論の一つの動機であった．さらには関数解析の発展にも，フーリエ級数の収束問題は多くの影響を与えた．

先に述べたように，連続関数のフーリエ級数はもとの関数に必ずしもすべての点で収束するとは限らないが，ほとんど至る所の x において収束するか，という問題を考えることができる．この問題は1966年にカールソンにより肯定的に証明された．すなわちカールソンは，2乗可積分関数のフーリエ級数は，もとの関数にほとんど至る所の x で収束することを証明したのである．しかしながらこの定理の証明は難しい．そして何故このように難しいかといえば，2乗可積分関数のクラスには複雑な関数も含まれていて，そのような複雑な関数を，単振動の組合せであるフーリエ級数の部分和により近似することが難しいのである．

関数をフーリエ級数に展開する場合，関数が滑らかであればあるほど，そのフーリエ係数 a_n, b_n は n を大きくしたときの0への減少度が速くなる．しかしその滑らかな関数を，区間 $(-\pi, \pi)$ 内のある1点において少しだけずらしてその点で不連続になるようにすると，とたんにフーリエ係数の減少度は悪くなる．これはすなわち，関数の局所的な変化が，大きい n に対応するフーリエ係数全体に大きく影響を及ぼしてしまうからである．それはまた単振動の重ね合わせを用いて，関数の局所的な性質をうまく表すことの難しさを示している．

一般に複雑な関数をどのように解析すべきか，ということは，ある意味実解析の基本的な問題意識である．そして複雑な関数を解析するためには，細かい部分すなわち局所的な複雑さをうまく捉える必要があり，そのためには単振動の重ね合わせとは異なる方法で関数を解析するのが望ましい．このような関数の局所的な複雑さをうまく捉えて関数の性質を調べる様々な手法が，実解析では研

究されてきた．そしてメイエによるウェーブレット理論は，このような実解析の流れから生み出されたものである．

3. ウェーブレット

フーリエ級数は周期関数についての分解であったが，ここでは $\mathbb{R}$ 上の 2 乗可積分関数について考える．このときある関数 $\psi(x)$ がウェーブレットであるとは，整数 j, k に対し

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$$

とおいたとき，

$$\{\, \psi_{j,k}(x) : j, k \in \mathbb{Z} \}$$

が $L^2(\mathbb{R})$ の完全正規直交系となるときを言う．このようなウェーブレットから作られる関数系を用いれば，$L^2(\mathbb{R})$ に属する関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} c_{j,k}\psi_{j,k}(x)$$

と展開でき，係数 $c_{j,k}$ は

$$c_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{\psi_{j,k}(x)}\,dx$$

と表せる．もしこのようなウェーブレット $\psi(x)$ で，区間 $[-m, m]$ の外では値が 0 になるようなものがあれば，$\psi_{j,k}(x)$ は $[2^{-j}k - 2^{-j}m, 2^{-j}k + 2^{-j}m]$ の外では値が 0 であるから，j が大きいとき，係数 $c_{j,k}$ には，$x = 2^{-j}k$ を中心とする幅 $2^{-j+1}m$ の区間における $f(x)$ の局所的な情報が反映されているであろうと考えることができる．

実はこのようなウェーブレットの例は，20 世紀初頭には知られていた．すなわちハール関数系と呼ばれるもので，それは

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & (0 \le x < 1/2), \\ -1 & (1/2 \le x < 1), \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

として与えられ，これはウェーブレットになる（ただしオリジナルのハール関数系は，少し異なる）．このハールのウェーブレットの場合，$\psi_{j,k}(x)$ は

不連続な関数になる．

周期関数のフーリエ級数展開の場合，その係数 a_n, b_n には関数の振動数 $n/(2\pi)$ に対応する情報が含まれていた．上のウェーブレット展開においても，その係数 $c_{j,k}$ に関数 $f(x)$ の振動数の何らかの情報が含まれていることが望ましい．すなわちもし $\psi_{j,k}(x)$ が特定の振動数の情報を持っていれば，その係数 $c_{j,k}$ には関数 $f(x)$ のその特定の振動数の情報が含まれているであろうと考えられる．一般に $\mathbb{R}$ 上の関数 $g(x)$ に対して，その振動数に関する情報は，フーリエ変換

$$\widehat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i\xi x}\, dx$$

によって与えられる．したがって $\psi_{j,k}(x)$ がある特定の振動数についての情報を持つためには，そのフーリエ変換 $\widehat{\psi_{j,k}}(\xi)$ がある程度局在していることが望ましい．そしてこのためには，$\psi_{j,k}(x)$ が，すなわち $\psi(x)$ がある程度滑らかであることが必要である．ハール関数系は不連続な関数からなるが，もし滑らかなウェーブレットが存在したならば，関数 $f(x)$ の解析に役立つであろう．

1985 年にメイエが発見したウェーブレット $\psi(x)$ は，無限回微分可能でそのすべての導関数が急減少関数であり，さらにそのフーリエ変換 $\widehat{\psi}(\xi)$ は，$[-8\pi/3, -2\pi/3] \cup [2\pi/3, 8\pi/3]$ の外では 0 になるというものである．したがって $\widehat{\psi_{j,k}}(\xi)$ は，

$$\left\{ \xi \in \mathbb{R} : \frac{2^{j+1}\pi}{3} \leq |\xi| \leq \frac{2^{j+3}\pi}{3} \right\}$$

の外では 0 になる．ただし $\psi(x)$ 自身は $\mathbb{R}$ 全体に拡がっているのだが，$\psi(x)$ の "大部分" は原点の近くに局在している（図 1）．

実解析においては，ウェーブレットによる分解と似たような形で関数を分解し研究することは，以前から行われていた．しかし完全正規直交系を与えるメイエのウェーブレット $\psi(x)$ の発見は驚きであった．そしてこのメイエのウェーブレットは非常に良い性質を持ち，様々な関数空間の解析に役立つことが示された．

関数の局所的な振舞いを調べるということは，

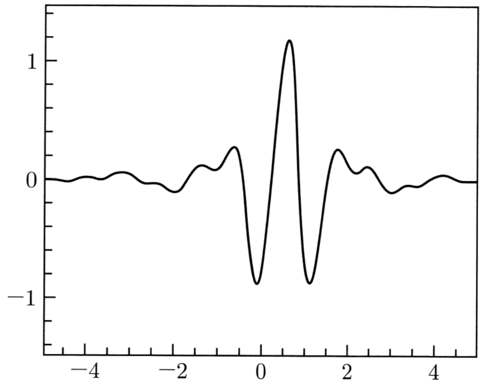


図 1　メイエのウェーブレット（山田道夫著「ウェーブレット変換とは何か」（本誌 1992 年特集「ウェーブレット」）より転載）．

信号解析などの応用上も重要な問題である．実際グロスマンとモルレは，信号の局所的な情報を取り出すために，上で説明したウェーブレット関数系とは少し異なる，連続的パラメータを持つ関数の分解，すなわち連続ウェーブレット変換について研究した．メイエによるウェーブレットの発見は，彼等の仕事に触発されたものである．そしてこのウェーブレットの研究を進めていくうちに，さらなる信号解析あるいは画像解析との関連が明らかになった．それが次節で説明する多重解像度解析である．

4. 多重解像度解析

メイエのウェーブレットの構成法を見て，マラーはそれが信号処理や画像解析において用いられていた考えと類似していることに気付いた．そしてメイエと共同で，一般にウェーブレットを構成するための多重解像度解析という枠組みを考えた．

$\{V_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ を $L^2(\mathbb{R})$ における部分空間の列とする．このとき $\{V_j\}$ が $L^2(\mathbb{R})$ における**多重解像度解析**（MRA, Multiresolution Analysis）であるとは，以下の条件を満たすときを言う．

(1)　任意の $j \in \mathbb{Z}$ に対し，$V_j \subset V_{j+1}$ となる．

(2)　$\bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \{0\}$.

(3) $\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j$ は $L^2(\mathbb{R})$ において稠密である．

(4) 任意の $j \in \mathbb{Z}$ に対して

$$f(x) \in V_j \iff f(2x) \in V_{j+1}.$$

(5) ある $\varphi(x) \in V_0$ が存在して，

$$\{\varphi(x-k) : k \in \mathbb{Z}\}$$

は V_0 の完全正規直交系となる．

条件 (5) を満たす $\varphi(x)$ を，多重解像度解析 $\{V_j\}$ の**スケーリング関数**と言う．

例えば多重解像度解析の例としては，次のものがある．$j \in \mathbb{Z}$ をとる．このとき各整数 k に対して，区間 $[k2^{-j}, (k+1)2^{-j})$ 上では定数になるような $L^2(\mathbb{R})$ に属する関数 $f(x)$ 全体の集合を V_j とおくと，$\{V_j\}$ は多重解像度解析を与える．このときのスケーリング関数は，

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & (0 \le x < 1), \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

で与えられる．

一般に多重解像度解析が与えられたならば，次のようにして，対応するウェーブレットを構成することができる．まず $\{\sqrt{2}\varphi(2x-k) : k \in \mathbb{Z}\}$ は V_1 の完全正規直交系となることがわかる．ここで $\varphi(x) \in V_0 \subset V_1$ であるから，係数 α_k を用いて

$$\varphi(x) = \sqrt{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \varphi(2x-k)$$

と表せる．このとき

$$\psi(x) = \sqrt{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \overline{\alpha_{-k+1}}\varphi(2x-k)$$

とおいて $\psi(x)$ を定めると，これが対応するウェーブレットとなることがわかる．

先述の多重解像度解析の例の場合には，ハールのウェーブレットが得られる．またうまく多重解像度解析を構成することにより，ドブシーは，ある有限区間の外では値が0となり，さらに適度な微分可能性を持つウェーブレットを構成した．

多重解像度解析の構造から，集合

$$\{\varphi(x-k), \psi_{j,k}(x) : j, k \in \mathbb{Z},\ j \ge 0\}$$

が，また $L^2(\mathbb{R})$ の完全正規直交系を与えることがわかる．今まで説明したウェーブレット関数系を成す関数 $\psi_{j,k}(x)$ において，j が負で $|j|$ が大きいとき，$\psi_{j,k}(x)$ は横に大きく拡がっている．関数の局所的な性質を調べるという本来の目的のためには，このような拡がった“さざ波”を用いることは不適当であろう．そこでスケーリング関数 $\varphi(x)$ を用いた上の関数系を使うほうが都合が良い．

また2次元のウェーブレットは，以下のように定めることができる．まず上で考えた1次元の $\varphi(x), \psi(x)$ をとる．このとき

$$\psi^1(x,y) = \varphi(x)\psi(y),$$
$$\psi^2(x,y) = \psi(x)\varphi(y),$$
$$\psi^3(x,y) = \psi(x)\psi(y)$$

とし，

$$\psi^i_{j,k_1,k_2}(x,y) = 2^j \psi^i(2^j x - k_1, 2^j y - k_2)$$

とおくと，

$$\{\psi^i_{j,k_1,k_2}(x,y) : i = 1,2,3,\ j, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}\}$$

が，2次元のウェーブレット関数系を与える．この2次元のウェーブレット関数系に対応する，2次元の多重解像度解析 $\{V_j\}$ を作ることができる．ここで2乗可積分関数 $f(x,y)$ が，画像を表すとする．このとき V_j に属する関数で $f(x,y)$ を最も良く近似するものを考えたとき，j を大きくすると，この関数がもとの $f(x,y)$ に収束することが示される．このときの様子が，画像の解像度を上げていくときの状況に対応するのである．

これらウェーブレットは，信号や画像の圧縮においても威力を発揮する．実際 JPEG2000 ではウェーブレットによる画像圧縮が用いられ，それまで使われていた方法に基づくものよりも，高性能の画像圧縮が得られた．

また多重解像度解析からウェーブレットを構成するやり方を工夫して，ウェーブレット関数系とは異なる $L^2(\mathbb{R})$ の完全正規直交系を無数に作る

ことができる．これらはウェーブレットパケットと呼ばれ，これら無数の関数系の中から，信号の解析に適した関数系を選ぶという研究もある．

5. おわりに

19 世紀初めにフーリエが関数のフーリエ級数展開を考えて以来，フーリエ解析は 200 年にわたって様々な数学的概念を生み出してきた．1985 年のメイエによるウェーブレットの発見は驚きであったが，しかしこれも何もないところから突然現れたわけではなく，ウェーブレット解析とほとんど同じような方法は，既に実解析において考えられていたのである．そしてウェーブレットが発見されてみると，実は同じようなことを信号や画像解析の研究者も考えていたことが分かり，このような純粋数学と応用方面のグループが互いに影響を与えながら，ウェーブレット理論は発展してきたのである．実解析の深いところで行われていた研究が，実は信号や画像の解析という身近な問題とつながっていたのである．

最後に，この解説で触れなかった話題については，本誌 2007 年 10 月号の特集「フーリエ解析の力」における山田道夫氏の解説[6]を参照していただきたい．またドブシーによるテキスト[2]は，ウェーブレットを学習するのに適している．またメイエによる解説書[5]も，入門書として良いものである．

参考文献

1) 芦野隆一，山本鎭男著，『ウェーブレット解析—誕生・発展・応用—』，共立出版，1997.
2) I. Daubechies, Ten lectures on wavelets, *SIAM*, 1992. (邦訳) 山田道夫，佐々木文夫訳，『ウェーブレット 10 講』，シュプリンガー・ジャパン，2003.
3) B.B. ハバード著，山田道夫，西野操訳，『ウェーブレット入門—数学的道具の物語』，朝倉書店，2003.
4) S. Mallat, *A wavelet tour of signal processing, Second edition*, Academic Press, 2001.
5) Y. Meyer, Wavelets: algorithms and applications, *SIAM*, 1993.
6) 山田道夫，「直交関数系とウェーブレット」，数理科学 2007 年 10 月号，35–40.

（たちざわ・かずや，北海道大学大学院理学研究院）

微分方程式と感染症数理疫学

稲葉　寿

1. はじめに

微分方程式は物理学や工学などにおいてはありふれた道具であり，かつ理論の定式化に不可欠なものと見なされている．それとは対照的に，生物学や農学，医学などの生命系諸科学においては，微分方程式はもとより，数学の利用自体が長い間，学の発展にとって必ずしも必須なものとは見なされてこなかった．生命現象は，非常に異質的で多数の素子が複雑な非線形相互作用を行った結果であり，そうした現象を記述・解析・計算する数学的・技術的ツールが発達してきたのはようやく過去30年くらいのことである．特に近年，計算能力や観測手段の高度化によって大量のデータが得られるようになったことは，数学的モデルによる理解や情報の整理の必要性をますます増大させている．

生命現象は分子レヴェル，細胞レヴェルから始まって，組織，個体ないし個体群，コミュニティ，メタ個体群に至るまで様々なレヴェルで研究されているが，それに対応して数学的なライフサイエンスの研究領域は現在では非常に広範である．生命系科学における数学利用をリードしてきた数理生物学・理論生物学は，伝統的に比較的少数のパラメータを用いて，微分方程式，差分方程式，積分方程式等として定式化される数理モデルによって抽象化された現象の本質的・原理的側面を理解しようとする傾向が強く，現象の方程式を定性的，数学的に研究する応用数学との関連が深い．一方，コンピュータパワーの飛躍的増加に依拠して多数のパラメータを含む複雑な生命システムをそのまま再現・理解しようとするシステム生物学やバイオインフォマティクスなどの新たな研究領域が急激に進歩しつつあるが，そうした新たな分野においてもモデルの定式化には微分方程式が活用されている．

本稿では，応用数学として興味深く，かつ社会的な要請という実践的観点からも近年ますます重要になってきている数理疫学（mathematical epidemiology）における感染症流行モデルを取り上げて，微分方程式の使われ方について紹介する*1)．以下で重要なポイントは，感染症理論疫学の基本的概念が数学的定式化を本質的に必要としている点である．

2. ケルマック–マッケンドリックモデルと閾値定理

現代的な意味での感染症流行モデルを創始したといってよいケルマックとマッケンドリックによる1927年の第一論文[10]において提起された感染症流行モデルは，局地的な封鎖人口における伝染病の急速かつ短期的な流行に関するモデリングであった．病気の流行期間が短いためホスト人口の出生，死

---

*1)　この分野の代表的なテクストとして Anderson and May[1]，Diekmann and Heesterbeek[3] がある．また邦語では拙著[7] およびティーメ[14] を参照していただきたい．

亡等の人口動態は無視できると考えよう．これは人口学的な変動を無視できるようなタイムスケールを想定しているということに他ならない．$S(t)$, $I(t)$, $R(t)$ をそれぞれ感受性人口（susceptibles：感染する可能性のある人口），感染人口（infectives：感染していてかつ感染させる能力のある人口），隔離された人口（recovered/removed：病気からの回復による免疫保持者ないし隔離者・死亡者）とする．このときケルマック–マッケンドリックの提起したモデルは，その最も単純なケースにおいては，以下のような常微分方程式システムによって表される：

$$
\begin{aligned}
\frac{dS(t)}{dt} &= -\beta S(t)I(t) \\
\frac{dI(t)}{dt} &= \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \\
\frac{dR(t)}{dt} &= \gamma I(t)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

ここで β は感染率，γ は隔離率である．$\beta I(t)$ は感染力（force of infection）であり，単位時間当たり単位人口当たりの感受性人口感染率を表す．一般にこのように人口を病気の状態に従って 3 つのコンパートメントに分けた感染症モデルを SIR モデルと言う．感染しても感染性のない状態（latent period / exposed class）や感染後症状の発症しない状態（潜伏期間：incubation period）などを考慮する場合には，感染状態はさらに分割されて，4 つの部分人口からなるモデル（SEIR モデル）を得る．免疫性の獲得が恒久的なものでなければ $R \to S$ という状態変化が可能となり，そうした場合は SIRS モデルなどと呼ばれる*2)．

さて，感染症流行モデルの解析の最初のステップは，ホストの人口に感染者が少数発生した場合に，流行（感染人口の持続的増大）が発生する条件（侵入条件）を明らかにすることである．モデル (1) において初期の感受性人口のサイズを $S(0)$ とする．そこに少数の感染者が発生したとすると，流行初期においては感染人口の成長は以下の線形化方程式で記述される：

$$
\frac{dI(t)}{dt} = (\beta S(0) - \gamma)I(t) \tag{2}
$$

したがって流行初期においては感染者人口は $I(t) = I(0)e^{(\beta S(0)-\gamma)t}$ というマルサス法則に従って増加する．すなわち病気が集団に侵入可能となる条件はこのマルサス径数（成長率）が正になる条件 $\beta S(0) - \gamma > 0$ に他ならず，これは

$$
R_0 = \frac{\beta S(0)}{\gamma} > 1 \tag{3}
$$

と書き直せる．もしも $R_0 < 1$ であれば，感染人口は自然に消滅する．このパラメータ R_0 は基本再生産数（basic reproduction number）と呼ばれる．$\beta S(0)$ はサイズ $S(0)$ の感受性人口集団において 1 人の初期感染者が単位時間当たり生産する 2 次感染者数であり，$1/\gamma$ は感染者の感染状態にある平均滞在時間であるから，R_0 は感受性人口集団に侵入した感染者が，その全感染期間の間に 1 人当たり生産する 2 次感染者の総数に他ならない．したがって直観的に言えば，$R_0 > 1$ であれば病気の流行が連鎖的に拡大して感染者人口は初期には指数関数的に増大するが，$R_0 < 1$ であれば流行は起こらず感染者人口は自然に減衰すると考えられる．このようにパラメータの値によって，解の定性的挙動が変化する現象を閾値現象（threshold phenomena）と呼ぶ．基本再生産数は感染症数理モデルにおける最も基本的で，重要なキーパラメータの一つであり，様々なケースにおける計算の方法が考えられてきている[2,4,5]．上記のケースでは R_0 の算出法は自明であるが，一般には必ずしも容易ではない．

次に流行が進行していった先の最終的状態がどうなるかを考えよう．(1) においては全人口を $N(t) = S(t)+I(t)+R(t)$ とおけば，$dN(t)/dt = 0$

*2) 以下では単純な常微分方程式システムだけを考えるが，1927 年の論文における本来のケルマック–マッケンドリックモデルは齢構造をもち，常微分方程式と非線形境界条件をもつ偏微分方程式の連立システムで表現される．その数学的構造は長い間必ずしも十分理解されなかったが，1970 年代末に至って Diekmann, Metz, Thieme 等によって詳しく再検討されてようやくその全貌が明らかとなった．ケルマック–マッケンドリックは，その後 1930 年代に 4 つの続編を書いているが，さらに複雑な状況の下で感染齢依存モデルを考察している．それらのモデルも，現在に至っても必ずしも十分に検討され尽くしたとは言い難い[6]．

であるから，全人口サイズは保存されている．よってそのダイナミクスは (S, I) の 2 次元力学系によって完全に決定される．相平面 (S, I) の第一象限 $\Omega = \{(S, I) : S \geq 0,\ I \geq 0\}$ 内の点を初期条件とする解軌道は $-\infty < t < \infty$ で存在して，Ω 内にとどまる．S 軸上の点はすべて平衡点である．$S(t)$ は単調減少で，非負であるから非負の極限 $\lim_{t\to\infty} S(t) = S(+\infty)$ が存在する．一方，$I(t)$ も $S < S_{cr} = \gamma/\beta$ という領域では単調減少で，非負の極限が存在するが，そのような極限は平衡点でなければならないから，$\lim_{t\to\infty} I(t) = 0$ である．S_{cr} はそれ以下では流行が起きない感受性人口の臨界サイズである．一方，時間を反転させて考えれば $t \to -\infty$ においてやはり解は平衡点（S 軸）に近づいていく．すなわち $-\infty < t < \infty$ での解軌道は横軸上の 2 つの平衡点を結ぶような軌道になっている．(1) の方程式を辺々割り算すれば，

$$\frac{dI}{dS} = -1 + \frac{S_{cr}}{S} \tag{4}$$

を得る．したがって (S, I) システムは以下のような積分をもつ：

$$I(t) = I(0) + S(0) - S(t) + S_{cr} \log \frac{S(t)}{S(0)} \tag{5}$$

(5) において $t \to \infty$ とすれば，

$$S(\infty) = S(0) + I(0) + S_{cr} \log \frac{S(\infty)}{S(0)} \tag{6}$$

を得る．ここでさらに

$$p(t) := \frac{S(0) - S(t)}{S(0)} = 1 - \frac{S(t)}{S(0)} \tag{7}$$

とおけば，指数 $p(\infty) = \lim_{t\to\infty} p(t)$ はこの流行において初期の感受性人口 $S(0)$ から感染によって除去される人口の割合（流行の強度あるいは最終規模）を示す．これを用いれば (6) は以下のように書き直せる：

$$1 - p(\infty) = e^{-R_0 p(\infty) - \zeta} \tag{8}$$

ここで $\zeta := \beta I(0)/\gamma$ は初期の感染人口から発生する 2 次感染者の総数である．(8) は唯一つの正根をもち，それが初期条件に依存する流行強度である．この根は $\zeta \to 0$ としたとき，$R_0 > 1$ であれば，ある正の値に収束するが，$R_0 \leq 1$ であればゼロへ収束する．$p(\infty) < 1$ であることは，ここで考えている感染症の流行は感染者人口の消滅によって終息するのであって感受性人口の消滅によってではないことを示している．

多くの流行は，初期の感受性人口サイズに比べて非常に少数の感染者からスタートすると考えられるから，$\zeta \to 0$ とした極限は現実的な意味がある．この極限の根は以下の最終規模方程式（final size equation）の解として得られる：

$$1 - p(\infty) = e^{-R_0 p(\infty)} \tag{9}$$

この場合，極限的な流行強度は R_0 の情報だけで計算できる．

R_0 が不明な感染症であれば，初期の感染者の成長率 λ を観測すれば，(2) からそれは $\gamma(R_0 - 1)$ に等しいから，$R_0 = 1 + (\lambda/\gamma)$ という推定が可能である．またもし流行を生き延びた感受性人口の割合 $1 - p(\infty)$ が測定できれば，最終規模方程式から

$$R_0 = -\frac{\log(1 - p(\infty))}{p(\infty)} \tag{10}$$

として基本再生産数が推定できる．

ケルマック–マッケンドリックモデル (1) は非常に単純な力学系であるが，局地的で短期的な流行の様子を良く再現することが知られている（図 1 参照）．この場合，ワクチン接種や隔離によって感受性人口規模を臨界値 γ/β 以下にすれば流行は防げることになる．最終規模方程式は非常に頑健な関係式であって，感染症の中間段階を多数に分割したり，個体群の異質性を取り入れても変化しないことがわかっている．

■ 3. 流行の定着：エンデミックモデル ■

多くの感染症の場合，閾値条件 (3) は，感染症流行が一時的な突発（outbreak）で終わらずに，長期的に人口に定着して風土病化する条件でもあ

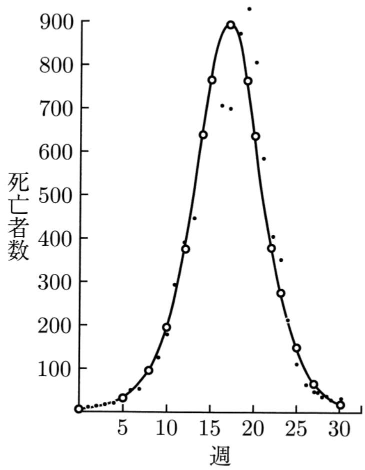


図 1 1905 年 12 月から 1906 年 7 月にわたってボンベイで流行したペストによる週当たりの死亡数（黒点）．実線は理論的に得られた流行曲線 dR/dt である．感染者の 80%–90%が死亡したため，単位時間当たりの隔離者数と死亡数は近似している．

る．そうした長期的な感染症の定着状態（endemic state）は，出生，移民によって，あるいは罹患経験のある人口の免疫力が加齢による自然減衰やウィルスの突然変異等によって失われたりすることによって，ホスト人口に新たな感受性人口が補充される場合に出現する．

出産や移民によって感受性人口の補充のある場合を考えてみよう．ケルマック–マッケンドリック (1) を修正して，ホスト人口の出生率 b，自然死亡率 μ を導入すれば，

$$\begin{aligned}\frac{dS(t)}{dt} &= b - \mu S(t) - \beta S(t)I(t)\\ \frac{dI(t)}{dt} &= \beta S(t)I(t) - (\mu+\gamma)I(t) \qquad (11)\\ \frac{dR(t)}{dt} &= -\mu R(t) + \gamma I(t)\end{aligned}$$

このとき総人口 $N(t) = S(t)+I(t)+R(t)$ は b/μ を安定な平衡値としているから，一般性を失うことなく初めから全人口は一定値 $N := b/\mu$ であると仮定しておこう．そこで以下では 2 次元力学系

$$\begin{aligned}\frac{dS(t)}{dt} &= b - \mu S(t) - \beta S(t)I(t)\\ \frac{dI(t)}{dt} &= \beta S(t)I(t) - (\mu+\gamma)I(t)\end{aligned} \qquad (12)$$

を考えれば十分である．

有界閉集合 $\Omega := \{(S,I) : S \geq 0,\ I \geq 0,\ S+I \leq N\}$ 内の点を初期データとする 2 次元の力学系 (12) の解軌道はコンパクト集合 Ω の中に閉じこめられている．初期侵入の状況においては $S \approx N$ であり，線形化方程式は

$$\frac{dI(t)}{dt} = (\gamma+\mu)\left[\frac{\beta N}{\gamma+\mu} - 1\right] I(t) \qquad (13)$$

となるが，前節と同様な解釈によって，

$$R_0 = \frac{\beta N}{\gamma+\mu} = \frac{\beta b}{\mu(\gamma+\mu)} \qquad (14)$$

と定義できる．さらに $dS/dt = 0, dI/dt = 0$ をみたす点を探せば，

$$E_1 := (N, 0), \quad E_2 := \left(\frac{N}{R_0}, \frac{\mu}{\beta}(R_0 - 1)\right)$$

という 2 つの定常解が存在し得ることがわかるが，E_1 は常に存在する自明な定常解であり，感染者のいない定常状態（disease-free steady state）である．E_2 は閾値条件 $R_0 > 1$ が満たされる場合にのみ正となって生物学的に意味のある定常解であり，感染症が人口に常在する（エンデミック）定常状態（endemic steady state）である．エンデミックな定常状態を (S^*, I^*) とおけば，

$$\frac{S^*}{N} = \frac{1}{R_0}, \quad \frac{I^*}{N} = \frac{\mu}{\mu+\gamma}\left(1 - \frac{1}{R_0}\right) \qquad (15)$$

である．すなわちエンデミックな状態における感受性人口比率と基本再生産数は逆数関係にあり，有病率（prevalence）I^*/N は $1 - 1/R_0$ に比例していて，その比例係数は，感染状態における平均滞在時間 $1/(\mu+\gamma)$ とホストの寿命 $1/\mu$ の比である．これらの式はエンデミックな感染症における R_0 の推定式とも見なせる*3)．

このとき $R_0 \leq 1$ であれば，$S = 0$ という場合を除いて Ω 内のすべての解軌道を引き寄せるという意味で，自明な定常状態は大域的に漸近安定である．一方，$R_0 > 1$ であれば，(13) が E_1

*3) このような単純な関係は年齢構造を無視した結果であり，より正確には年齢構造化モデルに依拠して，エンデミックな感染症の年齢別感受性人口（感染未経験人口）のデータを用いて R_0 を推定する必要がある．

における線形化方程式であるから，自明な定常解 E_1 は不安定化する．一方，唯一つのエンデミックな定常解 E_2 は境界以外のすべての軌道を引き寄せる大域安定性をもつようになることが示される．この結果は基本再生産数 R_0 が，侵入条件のみならず，流行の大域的挙動を決定する閾値条件を与えている典型的な例である．

ただし，モデル (11) が表現するような生涯免疫を誘導する典型的な感染症である麻疹や水疱瘡などでは，流行発生データに周期性が観測されるが，(11) はエンデミックな定常解の近傍で減衰振動を示すが，周期解をもたない．周期的な流行現象を説明するためには，パラメータの周期性やホストの年齢構造，感染過程における時間遅れなどの効果を考慮に入れる必要がある．

■ 4. 流行制御の可能性 ■

モデル (11) にワクチン接種の効果を導入してみよう．ワクチンを感受性人口への流入人口に接種することによって接種された人口は免疫化されて回復人口へ移動すると想定すると，(11) は以下のように書き換えられる：

$$
\begin{aligned}
\frac{dS(t)}{dt} &= (1-v)b - \mu S(t) - \beta S(t)I(t) \\
\frac{dI(t)}{dt} &= \beta S(t)I(t) - (\mu+\gamma)I(t) \qquad (16) \\
\frac{dR(t)}{dt} &= vb - \mu R(t) + \gamma I(t)
\end{aligned}
$$

ここで v は新生児ないし感受性移民におけるワクチン接種割合である．このとき感染者のいない定常状態では，$S^* = (1-v)b/\mu$ となっているから，そのような感受性人口への侵入した感染人口の増加は，線形化方程式

$$
\frac{dI(t)}{dt} = (\beta S^* - (\mu+\gamma))I(t) \qquad (17)
$$

で記述される．したがって，v に依存する実効再生産数（effective reproduction number）[*4] は

$$
R_v = \frac{(1-v)b\beta}{\mu(\mu+\gamma)} = (1-v)R_0 \qquad (18)
$$

と計算される．そこで，システム (16) に関しては，$R_v < 1$ であれば感染人口は自然減衰して流行が消滅するが，$R_v > 1$ であれば，常に感染者が存在するエンデミックな定常状態が大域的に安定になる．すなわち，$R_v < 1$ が流行の根絶条件である．$R_v < 1$ という条件はワクチン接種率の条件として書き直せば

$$
v > 1 - \frac{1}{R_0} = H \qquad (19)
$$

であるから，R_0 が推定されれば，流行を根絶するために必要な最小のワクチン接種割合 H が推定できる．これを集団免疫率と言う．例えば，表 1 に見るように，麻疹（measles）などでは基本再生産数は 10 から 20 程度になると推計されているから，根絶するためには 90–95%以上の免疫率が必要となる．根絶条件をクリアすることによって人口レヴェルで達成されるのが集団免疫（herd immunity）である．

一般に (19) のような根絶条件は麻疹やおたふく風邪のような一度罹患して回復すればほぼ生涯免疫を得られるような感染症に対しては有効であると考えられている．そのような感染症は必然的に生涯の早い時期に感染発生が集中するから，子どもの感染症と受け取られている．

しかしもし，ワクチンの接種の効果が自然減衰

表 1 主な感染症の R_0．
出典：「感染症の流行と予防；基本再生産数（R_0），集団免疫率（H）と予防接種」感染症・予防接種レター（第 20 号）「小児保健研究」63(4): 461–462 (2004).

感染症	Nokes 他の推定	Fine の推定
麻疹	16 ～ 21	12 ～ 18
おたふく風邪	11 ～ 14	4 ～ 7
風疹	7 ～ 9	6 ～ 7
百日咳	16 ～ 21	12 ～ 17
ジフテリア	–	6 ～ 7
ポリオ	–	5 ～ 7
天然痘	–	5 ～ 7
水痘	–	8 ～ 10

*4) ホスト人口全体が感受性である場合の感染人口の再生産数を基本再生産数と呼ぶのに対して，ホスト人口全体は必ずしも感受性ではない場合，実効再生産数と呼ぶ．

して必ずしも永続的な免疫を誘導しないか，そもそも部分的な免疫しか誘導しない場合，あるいはウィルス変異によって既存の免疫が無効化されるという状況では，ワクチンによるコントロールが常に可能であるとは限らない．例えば以下のようなシステムを考えてみよう：

$$\begin{aligned}\frac{dS(t)}{dt} &= b(1-v) - \mu S(t) - \beta S(t)I(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} &= -(\mu+\gamma)I(t) + \beta(S(t)+\sigma R(t))I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} &= bv - \mu R(t) + \gamma I(t) - \beta\sigma R(t)I(t)\end{aligned} \tag{20}$$

ここで回復者ないしワクチン接種者は $\sigma\beta$ という感染率で再感染する．すなわち $\sigma \geq 0$ は再感染率の相対的な強さを示す尺度である．このとき感染者のない定常状態は

$$(S^*, I^*, R^*) = \left(\frac{(1-v)b}{\mu}, 0, \frac{bv}{\mu}\right) \tag{21}$$

であるから，実効再生産数をワクチンの接種割合 v の関数として書けば，

$$R(v) = \frac{\beta}{\mu+\gamma}\left(\frac{(1-v)b}{\mu} + \frac{\sigma bv}{\mu}\right) \tag{22}$$

である．$R(v)$ は単調減少関数であり，$R(0) = R_0$ であるから $R(1) < 1 < R_0$ である場合は $v > v^*$ とすればワクチンによる流行抑止が可能である．ただし v^* は $R(v^*) = 1$, $v^* \in (0,1)$ となる根である．一方，もし $R(1) > 1$ であれば，言い換えれば，$R_0 > 1/\sigma$ であれば，乳幼児に対する 1 回の集団接種によっては根絶はできないことになる．

再感染のないモデル (11) では $R_0 \leq 1$ であれば，また部分的免疫化にあるモデル (16) では根絶条件 (19) が満たされれば，感染のない平衡状態は大域安定であるから，どのような侵入も起こり得ない．それは流行途中の実効再生産数

$$R_t = \frac{\beta S(t)}{\mu+\gamma} \tag{23}$$

が常に基本再生産数よりも小さいからである．しかしながら，マラリアやシャガス病などのように感染を媒介する生物（中間媒介者：ベクター）が存

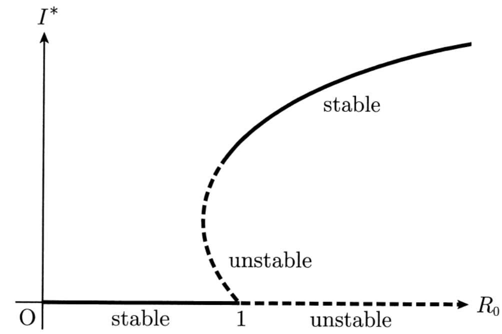


図 2　エンデミックな定常解の後退分岐．太線は局所安定な分岐解，破線は不安定な分岐解を表す．

在する場合や，HIV/AIDS のように長大な潜伏期のゆえにホストの人口構造との相互作用が無視できない場合においては，感染による超過死亡率を考慮すると実効再生産数が基本再生産数を上回って，$R_0 < 1$ であっても流行が発生する場合がある[8,9]．そのような場合は，正の定常解が $R_0 = 1$ を境に劣臨界（後退）分岐（subcritical/backward bifurcation）を起こしている（図 2 参照）[*5]．そこで，$R_0 < 1$ であれば，感染のないホスト人口は局所安定なので，少数の感染者による初期侵入は防げるが，既にエンデミックとなった感染症は R_0 を 1 以下にコントロールしても根絶するには不十分である．あるいは，大量の感染者が一度に出現すれば，$R_0 < 1$ でも，突然大規模で安定なエンデミック状態を導いてしまう可能性がある．こうした分岐メカニズムは，ある種の感染症の制圧が困難である根拠であるかもしれない．

5. おわりに

本稿では，簡単な常微分方程式モデルを用いて数理疫学の基本的概念・考え方を紹介した．感染症疫学の基本的概念は数理モデルを抜きにして明確に定式化することは困難であり，数学的表現がアイディアの発達そのものにとって非常に本質的

*5）　再感染モデル (20) においても，再感染率が感受性の感染率よりも大きく，$\sigma > 1 + (\mu/\gamma)$ となる場合には後退分岐が起きる．ただしそのような状況はあまり現実的ではないであろう．

である．

ここでは定性的性質のみを述べたが，より実践的には，基本再生産数，初期成長率，実効再生産数などを観測可能なデータから的確に計算して，感染状況を把握するとともに，公衆衛生的な介入行為（ワクチン接種，隔離，接触履歴調査等）が感染症制圧にどの程度効果的かを定量的に評価できるような理論的モデルが求められている[13]．

また本稿で紹介したモデルでは，感染因子の伝達は人口のランダムな出会いによると想定されているが，エイズやコンピュータウィルス等は特異な伝達のネットワーク構造が，その流行を理解する鍵であることがわかっている[11]．さらに，感受性人口を正常細胞，感染人口を感染細胞と見なすと，感染症流行モデルの諸概念は体内におけるウィルスダイナミクスの方程式に利用できる．それによってウィルス増殖を制御する適切な薬剤投与計画などの分析やウィルス進化の理論的研究等が行われている[12]．

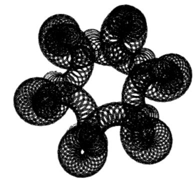
理論・数理疫学は，欧米においては生命系の数理科学として長い伝統をもち，優れた研究者を引き寄せる魅力的な研究分野と見なされている．問題の社会的重要性は言うまでもない．にも関わらず，これまでのところ我が国からの貢献は非常に少ないことは残念なことである．21 世紀においては生命系科学の社会的影響力はかつてないほど高まると考えられているが，その際，数学の利用は非常に本質的な役割を果たすであろう．

参考文献

1) R.M. Anderson and R.M. May (1991), *Infectious Diseases of Humans: Dynamics and Control*, Oxford UP, Oxford.
2) O. Diekmann, J.A.P. Heesterbeak and J.A.J. Metz (1990), On the definition and the computation of the basic reproduction ratio R_0 in models for infectious diseases in heterogeneous populations, *J. Math. Biol.* **28**: 365–382.
3) O. Diekmann and J.A.P. Heesterbeek (2000), *Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases: Model Building, Analysis and Interpretation*, John Wiley and Sons, Chichester.
4) K. Dietz (1993), The estimation of the basic reproduction number for infectious diseases, *Statistical Methods in Medical Research* **2**: 23–41.
5) J.A.P. Heesterbeek (2002), A brief history of R_0 and a recipe for its calculation, *Acta Biotheoretica* **50**: 189–204.
6) H. Inaba (2001), Kermack and McKendrick revisited: The variable susceptibility model for infectious diseases, *Japan J. Indust. Appl. Math.* **18(2)**: 273–292.
7) 稲葉　寿 (2002),『数理人口学』, 東京大学出版会.
8) H. Inaba and H. Sekine (2004), A mathematical model for Chagas disease with infection-age-dependent infectivity, *Math. Biosci.* **190**: 39–69
9) H. Inaba (2006), Endemic threshold results for age-duration-structured population model for HIV infection, *Math. Biosci.* **201**: 15–47.
10) W.O. Kermack and A.G. McKendrick (1927), Contributions to the mathematical theory of epidemics I, *Proceedings of the Royal Society* 115A: 700–721. (reprinted in *Bulletin of Mathematical Biology* **53(1/2)**: 33–55, 1991)
11) R.M. May and A.L. Lloyd (2001), Infection dynamics on scale-free network, *Physical Review* **E 64** 066112.
12) M.A. Nowak and R.M. May (2000), *Virus Dynamics: Mathematical Principles of Immunology and Virology*, Oxford University Press, Oxford.
13) 西浦博・稲葉寿 (2006), 感染症の流行：感染症数理モデルにおける定量的課題,「統計数理」, 第 **54** 巻第 2 号：461–480.
14) H.R. Thieme (2003), *Mathematics in Population Biology*, Princeton University Press, Princeton and Oxford［邦訳 ホルスト・R・ティーメ著，齋藤保久監訳（2006）『生物集団の数学（上）人口学，生態学，疫学へのアプローチ』日本評論社］.

（いなば・ひさし，東京大学大学院数理科学研究科）

流れの安定性の数学解析



柴田　良弘

1. ナヴィエ・ストークス方程式について

水や空気などの流れを知ることは，日常において非常に重要なことである．そしてこの流れを扱う学問として流体力学がある．実際流体力学は自動車や飛行機の設計，天気予報，血液の流れの解明その他ありとあらゆる流れのある場面に登場する重要な学問である．この流体力学が数学と出会ったのはフランスの工学者ナヴィエ（C.L.M.H. Navier）とイギリスの数学者ストークス（G.G. Stokes）[*1)] が流体の運動を表す基礎方程式として現在ナヴィエ・ストークス方程式と呼ばれる方程式を導出してからである．この論説では水のように運動中体積が保存されると考えられる粘性流体（非圧縮性粘性流体，incompressible viscous fluid）の運動を記述するナヴィエ・ストークス方程式の定常解の安定性についての解説を目標に筆者の観点より多少の考察を述べてみる．

$$\begin{aligned}&\rho(\boldsymbol{u}_t+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u})=-\nabla p+\mu\Delta\boldsymbol{u}+\boldsymbol{f},\\&\operatorname{div}\boldsymbol{u}=0\end{aligned}\qquad(1)$$

をナヴィエ・ストークス方程式と呼ぶ．$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(x,t)=(u_1(x,t),u_2(x,t),u_3(x,t))$, $p=p(x,t)$ はここで流体の位置 $x=(x_1,x_2,x_3)$, 時刻 t での流速および圧力を表し方程式においては未知関数である．$\boldsymbol{f}=(f_1(x,t),f_2(x,t),f_3(x,t))$ は外力で既知関数，ρ は流体の質量密度で正定数，μ は粘性係数で正定数とする．これらは物質に応じて決定されている．微分記号は次の通りである．

$$D_t\boldsymbol{u}=(D_tu_1,D_tu_2,D_tu_3)\quad(D_t=\partial/\partial t),$$
$$\nabla p=(D_1p,D_2p,D_3p)\quad(D_j=\partial/\partial x_j),$$
$$\Delta\boldsymbol{u}=(\Delta u_1,\Delta u_2,\Delta u_3),\quad\Delta u_j=\textstyle\sum_{k=1}^3D_k^2u_j,$$
$$\boldsymbol{u}\cdot\nabla=\textstyle\sum_{j=1}^3u_jD_j,$$
$$(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}=((\boldsymbol{u}\cdot\nabla)u_1,(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)u_2,(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)u_3).$$

流れを完全に決めるには観測を始める時刻 $t=0$ での初期条件 $\boldsymbol{u}(x,0)=\boldsymbol{a}(x)$ と流体の占める空間的集合 Ω の境界 Γ 上での流速を $\boldsymbol{u}(x,t)=\boldsymbol{v}(x,t)$ $(x\in\Gamma,\,t>0)$ と与える．ここで $\boldsymbol{a}(x)$, $\boldsymbol{v}(x,t)$ は既知関数である．例えば洗濯機の中の水の流れを考えるとすると洗濯機中の水の占める領域を Ω, その境界を Γ とし洗濯機のドラムの回転速度を $\boldsymbol{v}$ とすると Γ に接するところの流速 $\boldsymbol{u}|_\Gamma$ はドラムの回転速度と同じと考え境界条件 $\boldsymbol{u}(x,t)|_\Gamma=\boldsymbol{v}(x,t)|_\Gamma$ を与えることになる（図 1）．こうして方程式 (1) に初期条件と境界条件を与え，それらすべてを満たす $\boldsymbol{u}(x,t)$, $p(x,t)$ を求めて流れを数学的に決定するというのがナヴィエ・ストークスのアイデアでありこれが導出された 19 世紀中盤より現在に至るまで，非圧縮性粘性流体を記述する数学的方程式として確立されており数多くの研究がなされている．

方程式の意味を若干説明する．(1) をもう少し見やすくするために方程式を成分ごとに書く．

*1) C.L.M.H. Navier, *Mem. Acad. Sci. Inst. de France*, (2) **6** (1827), 389–440; G.G. Stokes, *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, **8** (1845), 287–319.

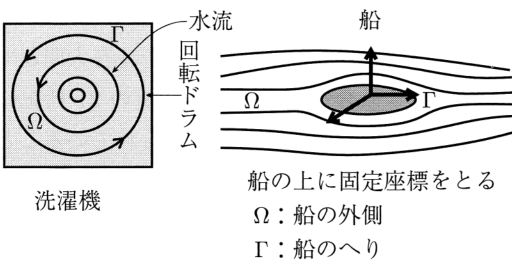


図 1 領域と境界.

$$\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}+\rho\sum_{j=1}^{3}u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\mu\Delta u_i+f_i, \tag{2}$$
$$\operatorname{div}\boldsymbol{u}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0$$

非圧縮条件 $\operatorname{div}\boldsymbol{u}=0$ についてはベクトル解析などでもおなじみであるからここでは説明を略する．(2) の初めの式を説明しよう．$\boldsymbol{u}$ を流速とする流線を考える．流線の座標を $x=x(t)=(x_1(t),x_2(t),x_3(t))$ とすると $x(t)$ は常微分方程式

$$\frac{dx_i(t)}{dt}=u_i(x(t),t)\quad(i=1,2,3)$$

の解である．そこでこの流れに沿った流速 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(x(t),t)$ の時間微分すなわち流れの加速度を計算してみると，合成関数の微分法により

$$\frac{d}{dt}u_i(x(t),t)=\frac{\partial u_i}{\partial t}+\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{dx_j}{dt}$$
$$=\frac{\partial u_i}{\partial t}+\sum_{j=1}^{3}u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=\frac{\partial u_i}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)u_i$$

である．ここで $dx_j/dt=u_j$ を用いた．すなわち左辺は流体の流線に沿った加速度を表している．よってニュートンの慣性の法則によりこれが力に等しいというのが運動方程式である．右辺はその力を表すのであるが，$-\nabla p$ は流体を微小に見たとき分子間相互に働く内部圧力を表す．次の $\mu\Delta\boldsymbol{u}$ は粘性項と呼ばれるものでこれを数学的に導出するにはテンソル解析の基礎知識が必要である．すなわちどのような座標系で運動を見ても同じであるということと，運動は等方的であり，粘性は流体運動の空間的変化に伴うものであるという仮説から $\mu\Delta\boldsymbol{u}$ と決まってしまうのである．ただし粘性は線形に働くとも仮定している．このように粘性が線形に働くと仮定した流体を一般にニュートン流 (Newtonian flow) と言う．しかし血液流のように粘性が線形に働く（すなわち粘性が増せばそれに比例して流速が遅くなる）ということが必ずしも成立しない流体が数多く発見されている．そこでは粘性は非線形に働く．これを非ニュートン流（Non-Newtonian flow）と呼ぶ．また $\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,f_3)$ は重力，遠心力，電磁気力など外から働く外力を表す項であり与えられた関数である．例えば重力などはポテンシャル力 $\boldsymbol{f}=-\nabla U$ であるからこれは圧力項にこめて $p+U$ を改めて p とおくことで $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{0}$ とできる[*2]．

2. ルレイ・ホップ解について

さてこの方程式を数学的に解くことについて議論しよう．非線形項は $\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}$ だけであり流線に沿っての微分として出てきているのでごく自然な非線形項である．その導出もニュートンの法則そのものであるから自然であり一見簡単そうな方程式であるが，実は数学的にはまだ完全な解答は得られていない．その難しさは圧力項 p とそれに伴う非圧縮条件 $\operatorname{div}\boldsymbol{u}=0$ に起因する．実際簡単のため外力 $=\boldsymbol{0}$ として方程式 (2) に div を施し $\operatorname{div}\boldsymbol{u}=0$ を用いると

$$\Delta p=-\mu\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2(u_iu_j)}{\partial x_i\partial x_j}$$

を得る．考えている領域に境界がないとすると上の式はラプラス方程式でこれは

$$p(x)=\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\Big(\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{u_i(y)u_j(y)}{|x-y|}dy\Big)$$

と解けることが知られている．ただし $1/|x-y|=((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2)^{-1}$ はニュートンポテンシャルである．こうしてこの $p(x)$ を (2) に代入するとこれは非線形な微分積分方程式

*2) より詳しくは流体力学の教科書を参照してほしい．代表的な教科書として巽友正著『流体力学』（培風館）をあげておく．

となりとたんに難しげに見える．譬えて言うと，もし天気予報で関東地方の雲の流れを知るには地球全体の空気圧を同時に決定しなくてはならないということで，途方もないような問題にも思える．実際方程式を解くことは今のところとても難しいのである．しかし 19 世紀後半以降の機械文明の発展にナヴィエ・ストークス方程式はかかせないものであり現在に至るまで数多くの研究がなされている．

数学的に厳密に (1) を扱った最初の数学者はルレイ（J. Leray）*3) である．彼の考察は次の通りである．まず解 $\boldsymbol{u}$ が存在するとして，$\boldsymbol{u}$ は流速であるからその運動エネルギー $\int |\boldsymbol{u}(x,t)|^2\,dx$ を考える．これについての情報は方程式 (2) の初めの方程式に u_i をかけて和をとり積分してガウスの発散定理を用いて微分を移す．$\operatorname{div}\boldsymbol{u}=0$ を用いると非線形項や圧力項は消え，簡単のため $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{0}$ として次の等式（エネルギー等式）を得る．

$$\rho\frac{d}{dt}\int|\boldsymbol{u}(x,t)|^2\,dx+\mu\int|\nabla\boldsymbol{u}(x,t)|^2\,dx=0 \tag{3}$$

を得る．ここで $|\boldsymbol{u}|^2=\sum_{i=1}^3 u_i^2$，$|\nabla\boldsymbol{u}|^2=\sum_{i,j=1}^3(\partial u_i/\partial x_j)^2$ を表す．実際解が存在すると仮定すると (3) を満たすような関数の範囲で存在すると予想される．ルレイはシャウダーとともにルレイ・シャウダーの不動点定理を構築し少なくともエネルギー不等式

$$\rho\frac{d}{dt}\int|\boldsymbol{u}(x,t)|^2\,dx+\mu\int|\nabla\boldsymbol{u}(x,t)|^2\,dx\le 0\quad(0<t) \tag{4}$$

を満たすような解 $\boldsymbol{u}$ を構成した．ホップ（E. Hopf）はルレイの後，より一般的な領域で解の存在を示した*4)．現在この 2 人の先駆者にちなんで (4) を満たすような (1) の解を**ルレイ・ホップ解**（Leray–Hopf solution）と言う．実はこのルレイ・ホップ解が一意であるかというのが現在大問題であり，アメリカ合衆国クレイ研究所の 21 世紀に解くべき問題として懸賞金がかけられていることは良く知られている．しかしこれについては筆者自身一意であると信じるものの多少の疑問もある．疑問は次の 2 つの点である．

(1) 圧力項は (4) に現れない．また圧力項は ∇p としか与えておらず，もし p が方程式で要求される圧力としても $p+c(t)$ と t のみの関数 $c(t)$ を加えても $\nabla(p+c(t))=\nabla p$ となり方程式を満たす．こうして圧力項はある意味不定である．

(2) (4) は等式ではなく不等式で満たす解しか今のところ構成できていない．これより実はある種のエネルギーは考えている方程式系をはみ出たところに散逸しているという風にもとれる．ということはこの散逸したエネルギーを取り込む新しい系を考える必要があるかもしれない．一般に方程式系を大きくする，すなわち未知関数を増やせば，一意性は証明しやすくなるが，解の存在証明はより難しくなる．

3. 流れの安定性

自動車の空冷式エンジンを考えてみよう．エンジンを始動してからしばらく後には，冷えた外気を取り込みエンジン内の温まった空気を外に放出する．この空気の流れは安定していなくてはならない．このような安定な空気の流れを数学的にはどのように捉えるかを考察してみたい．

まず安定性に関する数学的定式化を与える．

$$D_t u(t)+A(u(t))=f,\quad u(0)=a \tag{5}$$

と記号簡単のために方程式を抽象的に与える．空間変数 x は隠れているが，$A(u(t))$ は $u(t)=u(x,t)$ に働く x についての非線形な偏微分作用素と考える．外力 f は x のみに依存する関数とする．

*3) J. Leray, *J. Math. Pures Appl.*, **12** (1933), 1–82; *Acta Math.*, **63** (1934), 193–248.

*4) E. Hopf, *Math. Ann.* **117** (1941), 764–775; *Math. Nachr.*, **4** (1950/51), 213–231.
より現代的な視点から読みやすく書かれ多くの示唆にとんだ論文として K. Masuda, *Tohoku Math. J.*, (2) **36** (1984), 623–646 をあげておく．

ステップ (1)：$A(v) = f$ を解く．この方程式の解 $v = v(x)$（時間に依存しない解）を方程式 (5) の定常解（stationary solution）と呼ぶ．

ステップ (2)：$u(t) = v + w(t)$ としてテイラーの公式より

$$D_t w(t) + A'(v)w(t) + B(v, w(t)) = 0, \quad w(0) = a - v \tag{6}$$

と表す．ここで $B(v, w(t))$ は $w(t)$ の 2 次の非線形項である．これを v の周りの摂動方程式と言う．現在の数学解析では (6) の線形化問題

$$D_t w(t) + A'(v)w(t) = 0, \ w(0) = b \tag{7}$$

の最良の解析により一般的に次の 2 つの定理を示すことが多くの場合可能である．

(i) ある時刻 T が初期値 $a - v$ に応じて決まり (6) の解 $w(t)$ が時刻 $0 \leq t < T$ で存在する．

(ii) あるノルム $\| \ \|$ と定数 $\epsilon > 0$ が存在し $\|a - v\| < \epsilon$ ならば (6) の解 $w(t)$ が時刻 $0 \leq t < \infty$ で存在する．

さらに $\sup_x |w(x,t)| \leq Ct^{-\alpha}$ $(t \to \infty)$ が成立する．ここで $\alpha > 0$ の定数である．

(i) を時間局所的安定性，(ii) を時間大域的安定性と言う．(ii) の場合 $|u(x,t) - v(x)| \leq Ct^{-\alpha}$ であり時間発展する解が時刻とともに定常解に近づいていくことが分かる．

ナヴィエ・ストークス方程式で言えば，方程式 (1) で時間微分の項を落とした

$$\rho \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = -\nabla p + \mu \Delta \boldsymbol{v} + \boldsymbol{f}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \tag{8}$$

の解 $\boldsymbol{v}$ がステップ (1) の定常解である．定常解は別に運動が静止していることを表しているのではなく，流れの速度分布が空間的に時間に無関係に与えられていることを表している．空冷式エンジンでいえばこの解がエンジンの周りの安定した空気の流れを表している．そしてステップ (2) の安定性はエンジンを始動するときを時刻 $t = 0$ とし自動車が動き出してしばらくしてステップ (1) の安定な速度分布に近づくか否かを論じていることになる．ステップ (2) において (ii) の時間大域的安定性が得られる場合，自動車は安定に走るわけである．そうでなければ加熱し過ぎて途中でオーバーヒートする．

数学的に現代的な定式化の下でナヴィエ・ストークス方程式の定常解を考えたのはフィン (R. Finn) である[*5)]．彼は定常問題 (8) で $\lim_{|x| \to \infty} \boldsymbol{v}(x) = \boldsymbol{v}_\infty$ なる解を考察した．ここで $\boldsymbol{v}_\infty$ は無限遠方での流れを表す定数ベクトルである．例えば船が一方向に一定速度で動いているときの流れを想像すればよい．$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_\infty + \boldsymbol{w}$ と置き換えて (8) に代入すると

$$\rho \boldsymbol{w} \cdot \nabla \boldsymbol{w} + \rho \boldsymbol{v}_\infty \cdot \nabla \boldsymbol{w} = -\nabla p + \mu \Delta \boldsymbol{w} + \boldsymbol{f}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{w} = 0 \tag{9}$$

を得る．この方程式が表す流れをオゼン流 (Oseen flow)[*6)] と言う．この方程式の線形化方程式 (7) は (9) で非線形項 $\boldsymbol{w} \cdot \nabla \boldsymbol{w}$ を落としたオゼン方程式

$$\rho \boldsymbol{v}_\infty \cdot \nabla \boldsymbol{z} = -\nabla p + \mu \Delta \boldsymbol{z} + \boldsymbol{f}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{z} = 0 \tag{10}$$

でありこれは障害物の周りの流れの近似方程式として有名である．フィンは外力項 $\boldsymbol{f}$ と無限遠での流れ $\boldsymbol{v}_\infty$ が小さい場合の (9) の解 $\boldsymbol{w}(x)$ を (10) の解からの非線形摂動として構成した．この解 $\boldsymbol{w}(x)$ に対し次の評価が成立する．

$$|\boldsymbol{w}(x)| \leq \frac{C}{|x|(1 + |\boldsymbol{v}_\infty|(|x| - x_3))}, \quad |\nabla \boldsymbol{w}(x)| \leq \frac{C}{|x|^{\frac{3}{2}}(1 + |\boldsymbol{v}_\infty|(|x| - x_3))^{\frac{3}{2}}}, \quad \|\boldsymbol{w}\|_3 + \|\nabla \boldsymbol{w}\|_{3/2} < \infty. \tag{11}$$

[*7)]

船の進行に譬えれば船の航跡の様子は，(11) の

*5) R. Finn, *ARMA* **3** (1959), 381–398; *ARMA* **19** (1965), 363–406.

*6) ナヴィエ・ストークス方程式に関する最初の数学的著作として C.W. Oseen の著書 [*Neure Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik*, Leipzig, Akad. Verlagsgesellschaft M.B.H.(1927)] をあげておく．Oseen 方程式 (10) とその基本解はすでにこの本に現れる．

*7) $\|v\|_p = (\int |v(x)|^p \, dx)^{\frac{1}{p}}$ を表す．

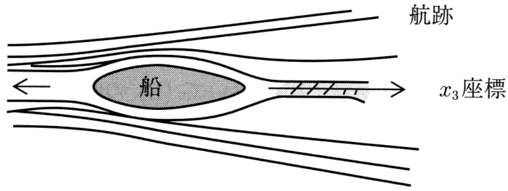


図2　定常解の減衰の様子.

初めの2つの不等式より進行方向の逆側である $-(0,0,1)$ 近傍の解の減衰が $-(0,0,1)$ 方向をある程度離れたところに比べ悪くなっているということから分かる（図2）.

フィンはこの解を物理的に意味のある解と考え，PRS (physically reasonable solution) と呼んだ．ルレイは (8) に対して $\|\nabla \boldsymbol{v}\|_2 < \infty$ なる解を既に構成していたが，この情報だけでは $\lim_{|x|\to\infty} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_\infty$ であることは分からない．例えば Gagliardo–Nirenberg–Sobolev の不等式の観点からある定数ベクトル $\boldsymbol{b}$ があって $\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{b}\|_6 \le C\|\nabla \boldsymbol{v}\|_2$ は言えるが $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{v}_\infty$ かどうかは分からない．少なくともルレイの解からは流れの定性的な性質は分からない．フィンはこれを指摘し物理的に意味のある定常解（PRS）とその安定性の研究を提案し，自身は定常解の存在を示し（ステップ (1)），安定性（ステップ (2)）は後進に譲ったのである．安定性の研究は J. Heywood, K. Masuda と引き継がれ，T. Kobayashi–筆者，筆者により Heywood, Masuda とは本質的に異なる時間発展 Oseen 方程式のスペクトル解析により完全に解決された*8)．それによると $\boldsymbol{a}$ を初期値，$\boldsymbol{w}$ をフィンの構成した定常解 (PRS) とするとき，少なくとも $\|\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}_\infty)\|_3$ と $|\boldsymbol{v}_\infty|$ が十分小さければナヴィエ・ストークス方程式の解 $\boldsymbol{u}(x,t)$ が一意に存在し

$$\sup|\boldsymbol{u}(x,t)-(\boldsymbol{w}(x)+\boldsymbol{v}_\infty)| \le Ct^{-1/2} \ (t\to\infty) \tag{12}$$

となるのである．すなわちフィンの定常解 (PRS) は安定である．また $\|\boldsymbol{u}(\cdot,t)-(\boldsymbol{w}(\cdot)+\boldsymbol{v}_\infty)\|_3 < \infty$ $(t\to\infty)$ も分かる．この意味するところは，初期値のクラスがルレイ・ホップ解とは違うものの流速が2乗積分可能のクラスではなく3乗可積分のクラスである．これは物理的スケーリングとも合い，小さい解とは言えルレイ・ホップの研究に新しい視点を与える研究であり，フィンが望んでいた最終結論でもあった．例えば船のあとにできる航跡の時間発展の様子は (11), (12) から分かる．また船が安定に航行することも数学的に分かるわけである．

*8) J.G. Heywood, *ARMA* **37** (1970), 48–60; *Acta. Math.* **129** (1972), 11–34; K. Masuda, *J. Math. Soc. Japan* **27** (1975), 294–327; T. Kobayashi & Y. Shibata, *Math. Ann.* **310** (1998), 1–45; Y. Shibata, *Quart. Appl. Math.* **57** (1999), 117–155.

このような研究の流れはさらに回転しながら並進運動する物体の周りの流れの安定性の研究へと進んだ（船のスクリューを想像してほしい）．実際ベルヌーイの法則により回転する力を流体が受けると回転軸方向に並進する力を得る．これは船がスクリューにより進行する原理である．この問題に関しても上記と同様少なくとも小さな回転外力と推進力に対して安定な定常解が存在することが示せた*9)．

最近の未解決な話題として騒音発生のメカニズムの解明がある．実験とその数値解析的な検証より現象的に説明することは可能であるが，根本原理が不明である．根本原理の解明にはナヴィエ・ストークス方程式を適当な状況設定の下に解く必要がある．例えば考えている機械の周りの空気の流れを表す定常解があるとして，これがステップ (2) の意味で安定であるか，または不安定である（安定ではない）かを論じることで騒音発生の説明ができれば根本原理の解明になる．しかしこの試みは (7) がストークス作用素に変数係数の複雑なの低階項がつくような方程式となり解の漸近挙動を論ずることが現在の数学解析においては極めて難しい問題のように見える．新しい数学が必要になる数学解析において挑戦的な問題である．

*9) G.P. Galdi and A.L. Silvestre, *RIMS Kokyuroku Bessatsu* **B1** (2007), 127–143; Y. Shibata, 京都大学数理解析研究所講究録 **1536** (2007), 1–18.

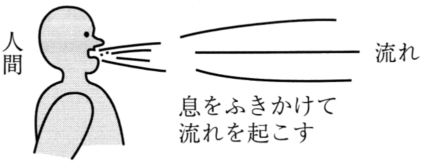
4. 圧力項について

2節の終わりに圧力項の扱いが問題であることを述べたが，圧力項に関する最近の研究から分かったことを少し述べてみたい．流速が遅いような流れについては，非線形項はその積であるから無視することにすれば，線形近似方程式として次のストークス方程式を得る．

$$\rho D_t \boldsymbol{u} - \nu \Delta \boldsymbol{u} + \nabla p = 0, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0.$$

これに境界条件 $\boldsymbol{u}|_\Gamma = 0$ と初期値 $\boldsymbol{u}(x,0) = \boldsymbol{a}(x)$ を課して考える．今初期値のヘルムホルツ分解を $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + \nabla\pi$ とする．ここで $\boldsymbol{b}$ は $\operatorname{div}\boldsymbol{b} = 0$ かつ $\nu \cdot \boldsymbol{b}|_\Gamma = 0$（$\nu$ は Ω の境界 Γ の単位外法線）を満たし，π はスカラー関数である．このとき $p(x,t) = \pi(x)\delta(t) + p_1(x)t^{-\frac{1}{2}} + O(1)$ $(t \to 0)$ と展開できる．ここで $\delta(t)$ はディラックのデルタ関数と呼ばれるもので，$t = 0$ でのパルスを表す．数学的には厳密ではないが，$\delta(0) = \infty$, $\delta(t) = 0$ $(t \neq 0)$, $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1$ なる性質をもつ．とくに $\delta(t) = 0$ $(t > 0)$ であるから方程式を $t > 0$ で考えている限りここでは影響しない．またソレノイダルベクトルを初期値に与えると（すなわち上の分解で $\nabla\pi = 0$ と取れるような初期値）この項は出てこないがそれでも $p(x,t) = p_1(x)t^{-\frac{1}{2}} + \cdots$ となり $t \to 0$ としたときに圧力項 p は特異な振舞いをする．これよりなんらかの方法で初期の流速を与えて流れができたとしたとき初めに与える圧力はとんでもなく強いものであることが見て取れる．例えば息を吹きかけて空気の流れを作る．相当強く吹きかけて（圧力をかけて）も流れには大したことは起こらないであろう（図3）．

すなわち一見滑らかにゆっくりと流れが始まったとしてもそのときの内部圧力は数学的にはほぼ無限大である．ルレイ・ホップ解の一意性は外力が0としても初めに与えられた莫大な内部圧力がどのように運動に影響を与えているかを詳しく調べない限り得られないと思う（勿論十分ではないと思うが必要であると思う）．



流れを起こすには相当の圧力が必要

図3

5. 終わりに

流れの安定・不安定に関して現時点での数学の解析力では残念ながらとても現実の流体の解析に直接には役立たないようにも思えることが多々ある．しかし現場において数値解析や実験データから得られる情報だけでは実際に起こっていることの説明ができないことも多い．このような場合やはり数学的に厳密な解析はなくてはならない．それができるための新しい数学解析の手法が必要となるのが常である．これは必然的に新しい数学を生み出す原動力となる．そして新しい数学解析により数学を応用する現場での刷新的なアイデアにつながることは多々ある．数学を応用する現場との相互交流により数学解析がより発展し，またそれに伴い応用する現場に刷新的な視点が得られることが文明発展の一つの原動力であると思う．そしてこれはそう目立って直ぐに結果の出るものではないが，たゆむことのない人類の努力の蓄積により常に答えを得てきたことである．

（しばた・よしひろ，早稲田大学理工学術院）

経路積分

一 瀬　孝

1. はじめに

経路積分はファインマン（R.P. Feynman）によって発明された量子力学の別の定式化を与える画期的な手法である．1942年プリンストン大学の学位論文[1]に書かれ，1948年装い新たな論文[2]として出版された．経路積分は，また汎関数積分とも言われ，その単純さと普遍性故に現在に至るまで絶えず多くの人たちを魅了し続けてきた．それは，数学的にはあまり確立されていないものの，場の量子論，量子電磁力学，ゲージ場の量子論，量子宇宙論，それに最近の弦の量子論に至るまで量子物理学の諸分野で，計算手段も与えているので極めて実効的に使われている．確率論の拡散過程や平衡統計力学は，それぞれ虚数時間量子力学，ユークリッド時空の場の量子論とみなせる側面があり，そこでの問題は経路積分・汎関数積分の問題になる．

経路積分・汎関数積分の方法を発展させることの重要性は，早くから指摘されていた．この二十数年，その数学の色々な分野への影響も大きく，物理学と研究が極めて高度なレベルで交流し合いお互いにそれぞれの成果を挙げているようだ．

本稿では，この経路積分が「いかに使われているか」について少し述べてみよう．

2. 変数係数の微分方程式

まず，経路積分が量子力学や場の量子論でよく使われる第一の理由は，それが粒子（例えば，電子や光子）の伝播を記述する最も重要な量である**プロパゲイター**，あるいは**グリーン関数**の明示的表示を，形式的にではあるが，与えることができるからであろう．それを説明するために，量子力学の基礎方程式である**シュレーディンガー方程式**

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,x)=\left[-\frac{\hbar^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x)\right]\psi(t,x) \quad (1)$$

を考えよう．$i=\sqrt{-1}$ であり，$\psi(t,x)$ は質量 1 の粒子がポテンシャル $V=V(x)$ の下での運動を記述する波動関数と言われるものである．t は時間変数，x は空間変数で，簡単のため空間の次元は 1 次元とした．また，$\hbar=h/2\pi$ は物理定数であり，この h は極めて小さな正定数でプランク定数と言う．方程式 (1) で特に注意してほしいことは，$V(x)$ が定数でないときを考えるので，変数係数の偏微分方程式になっていることである．

この方程式と共に知りたいことは，時刻 s での初期値 $\psi(s,x)=f(x)$ を与え，時刻 t での解 $\psi(t,x)$ がポテンシャル関数 V の依存性が見えるように解けるか．より精しく問うために，解を

$$\psi(t,x)=\int K(t,x;s,y)f(y)dy \quad (2)$$

と積分表示できるとしよう．この積分核 $K(t,x;s,y)$ をプロパゲイター，グリーン関数，あるいは基本解等と言う．それは (1) を満たし，さらに $K(t,x;s,y)=\int K(t,x;\tau,z)K(\tau,z;s,y)dz$ ($t\geq$

$\tau \geq s$), 及び, $K(s,x;s,y) = \delta(x-y)$ (右辺の $\delta(\cdot)$ はデルタ関数) を満たしている. 上の問は, この $K(t,x;s,y)$ を V 依存性が見えるように表示できるか, ということになる.

残念ながら, 一般に, 変数係数の常微分・偏微分方程式は解がその係数にいかに依存するか明示的に見えるようには解けない. 数理物理の諸問題に現れる方程式で, 所謂「解ける」クラスに属する方程式群があるが, かなり限られたクラスである. (1) で言えば, V が極めて特殊な場合, 例えば, 1 次関数の x とか 2 次関数の x^2 等のような場合を除いて, 偏微分方程式 (1) は解けない. つまり, 解 $\psi(t,x)$, あるいは基本解 $K(t,x;s,y)$ を V 依存性が見えるようには書けない. もちろん, 作用素論や微分方程式論的手法によって解や基本解の構造や性質を調べることができる.

ところが, 経路積分の 凄い ところは, 形式的ではあるが, V 依存性が見えるような解の表示を与えることができることなのである.

説明は後回しにして, 経路積分による表示を積分核に対して行うと,

$$K(t,x;s,y) = C \sum\nolimits_{X:X(s)=y,X(t)=x} e^{\frac{i}{\hbar}S(X)} \tag{3}$$

となる. C はある規格化定数である. $S(X)$ は**経路** $X:[s,t] \to \mathbf{R}$ に対する**作用**と呼ばれ, 一般には対応する古典力学のラグランジュアン $\mathcal{L}(X)$ [= (運動エネルギー) − (ポテンシャルエネルギー)] の時間積分 $S(X) = \int_s^t \mathcal{L}(X)d\tau$ である. いま考えている場合は, $\dot{X}(\tau) := \frac{dX(\tau)}{d\tau}$ として,

$$S(X) = \int_s^t \left[\frac{1}{2}\dot{X}(\tau)^2 - V(X(\tau))\right] d\tau \tag{4}$$

で与えられる. ポテンシャル V が $S(X)$ の中に明示的に現れていることに注意してほしい. (3) の和 $\sum_{X:X(s)=y,X(t)=x}$ は, 時刻 s に空間の位置 y を出発し時刻 t に空間の位置 x に至る経路 X すべてにわたって 足しあげる のである (図 1).

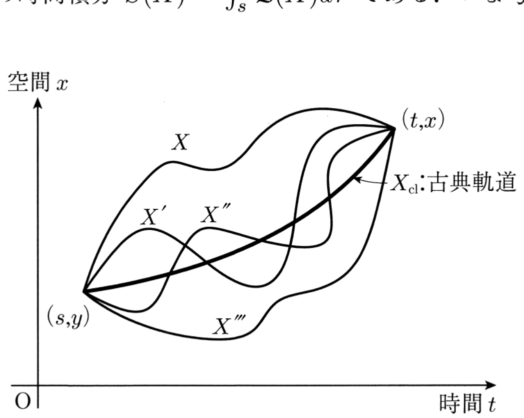


図 1　(s,y) と (t,x) を結ぶ経路たち.

3. 経路積分

あまり説明をしないで式 (3) を書いてしまったが, 実は, (3) が, '積分' の形はしていないが, 経路積分なのである. 急いで補おう.

実際 (3) は, ファインマンがおいた 2 つの物理的仮設そのものである. そもそも, 積分核 $K(t,x;s,y)$ は, 粒子が時刻 s に空間の位置 y を出発し時刻 t に空間の位置 x に至るという事象に対する**全確率振幅**とも言われ, 2 乗がその事象に対する確率を与えている. まず, それは粒子がこの時空の 2 点 (s,y), (t,x) 間を個々の経路 X を経て行くという事象に対する確率振幅たちすべての和であり, 次に, 各経路 X ごとの寄与は $Ce^{iS(X)/\hbar}$ と定義するのである. C は経路 X に無関係な定数とする. 量子力学では, 各経路 X は平等に同じ大きさ (絶対値) で全確率振幅 $K(t,x;s,y)$ に寄与し, 経路ごとの個性はその位相 (偏角) の違いで表されていると言える. この点で古典力学はそのようになっていない. 粒子は時空の 2 点 (s,y), (t,x) を結ぶ経路で作用 $S(X)$ を停留にする特別な経路, すなわち, **変分原理**から従うオイラー・ラグランジュ (Euler–Lagrange) 方程式として得られる運動方程式 $\frac{d^2X(\tau)}{d\tau^2} = -V'(X(\tau))$ を満たす**古典軌道** $X_{\rm cl}$ に沿って運動するからである.

話をもとに戻す. これらすべての経路 X たちの無限次元空間上の一様 '測度' $\mathcal{D}[X]$ がもし存在したとして[*1], (3) を右辺の和記号をもっともら

*1) ここで,「測度」とは, 例えば 3 次元空間 $\mathbf{R}^3$ 上の関数 $f(x)$ の積分 $\int_{\mathbf{R}^3} f(x)\,dx$ の体積要素 dx に当たるものである.

しく積分記号に置き換えた‘積分’

$$K(t,x;s,y) = \int_{X:\,X(s)=y,X(t)=x} e^{\frac{i}{\hbar}S(X)}\mathcal{D}[X] \tag{5}$$

が，ファインマンの**経路積分**である．$\mathcal{D}[X]$ は，1次元空間である実数 $\mathbf{R}$ 上の各 τ ごとに1つずつ同一のルベーグ測度 $dX(\tau)$ を考えそれらの無限直積 constant$\cdot \prod_{0<\tau<t} dX(\tau)$ と解せられる．

ファインマンは，$K(t,x;s,y)$ を規格化も考慮して次のような時間分割近似

$$\frac{\int_{\mathbf{R}^{n-1}}\exp[\frac{it}{\hbar n}\sum_{k=0}^{n-1}(\frac{1}{2}(\frac{x_{k+1}-x_k}{t/n})^2-V(x_k))]dx_1\cdots dx_{n-1}}{\int_{\mathbf{R}^{n-1}}\exp[\frac{it}{\hbar n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}(\frac{x_{k+1}-x_k}{t/n})^2]dx_1\cdots dx_{n-1}} \tag{6}$$

の $n\to\infty$ のときの極限として定義した．ただし，時間区間 $[s,t]$ を $s=t_0<t_1<\cdots<t_n=t, t_k-t_{k-1}=t/n,$ と n 等分して，経路 X の各時刻 $t_k\,(k=0,1,2,\cdots,n)$ での位置を $x_k := X(t_k)$, $x_0=y$, $x_n=x$ とおいた．もちろんファインマンは，このように時間分割近似の極限として定義した $K(t,x;s,y)$ がシュレーディンガー方程式 (1) を満たすことを示していることは言うまでもない．

場の量子論，量子電磁力学，ゲージ場の量子論等では，もっと一般の経路積分・汎関数積分，例えば，スカラー場の量子論では，

$$\int_{\phi:\,\mathbf{R}^d\to\mathbf{R}^N} e^{\frac{i}{\hbar}S(\phi)}\mathcal{D}[\phi] \tag{7}$$

のような汎関数積分が登場してくる．関数 $\phi(x)$ は，もはや経路ではなく，d 次元時空 $\mathbf{R}^d=\mathbf{R}\times\mathbf{R}^{d-1}$（時間1次元，空間 d–1 次元）上の**場**（field）と呼ばれ，N 次元空間 $\mathbf{R}^N$ 値関数である．ϕ の汎関数 $S(\phi)$ はラグランジュアン密度 $\mathcal{L}(\phi)$ の積分 $S(\phi)=\int\mathcal{L}(\phi)dx$ で与えられ，やはり作用と呼ばれる．$\mathcal{D}[\phi]$ はこれらすべての場 ϕ たちの無限次元空間上の一様‘測度’である．最初に述べた量子力学の場合は，$d=1$ で，一般に1粒子の場合は $N=3$ であるが，簡単のため $N=1$ とした．

ここで，積分による表示があると何がよいかについてひとこと言っておくと，少し雑な言い方になるが，普通のルベーグ測度 dx による積分では極限と積分記号の順序を入れかえることができる．すなわち，正値非減少関数列 $\{f_n\}$ が $\lim_{n\to\infty}f_n=f$ を満たすなら，$\lim_{n\to\infty}\int f_n dx=\int f dx$ が従うことである．この性質が大変役に立ち，**可算加法性**と言うものである．

しかし，(5) の $\mathcal{D}[X]$ や (7) の $\mathcal{D}[\phi]$ は，一般には可算加法的測度としては存在しない．このままではなかなか先に行けないが，時間 t を $t\to -it$ と**虚数時間**に移した場合，つまり，時間と空間を同じ足場で扱う所謂**ユークリッド**（Euclid）**化**した場合を考えると幾分よくなる．話は拡散過程や平衡統計力学の問題へ移行する．一般的なことを急いで注意しておくと，この場合 (5) や (7) の作用 $S(X), S(\phi)$ に当たる部分がラグランジュアン（密度）の積分からハミルトニアン（密度）の積分にかわる．さて，$\hbar=1$ とおき，また簡単のため $s=0$ とする．すると，(3) の $\frac{i}{\hbar}S(X)$ はハミルトニアンの時間積分 $-\int_0^t[\frac{1}{2}\dot{X}(\tau)^2+V(X(\tau))]d\tau$ に移り，$X_0(\tau) := X(t-\tau)-x, 0\le\tau\le t,$ とおいて経路たちを X から X_0 へ変換して書き直すと，(5) は

$$K^E(t,x;0,y) := \int_{X_0:X_0(0)=0,X_0(t)=y-x}\mathcal{D}[X_0] \times\ e^{-\int_0^t[\frac{1}{2}\dot{X}_0(\tau)^2+V(x+X_0(\tau))]d\tau} \tag{8}$$

になる．同時に，方程式 (1) は温度 $u(t,x)$ が満たす熱方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-V(x)\right]u(t,x) \tag{9}$$

に移っている．既に 1923 年頃ウィーナー（N. Wiener）は，(8) の右辺の $e^{-\int_0^t\frac{1}{2}\dot{X}_0(\tau)^2d\tau}\mathcal{D}[X_0]$ の部分から時間 $[0,\infty)$ 上の $X_0(0)=0$ を満たす連続経路 X_0 たちの空間 $C_0 := C_0([0,\infty)\to\mathbf{R})$ 上に可算加法的確率測度 $d\mu(X_0)$ を構成していた．**ウィーナー測度**と呼ばれ，初めての真正の汎関数測度であった．1947 年頃ファインマンと同じコーネル大学にいて彼の話を聞いたカッツ（M. Kac）は，ウィーナー測度を用いて熱方程式 (9) の初期

値 $u(0,x)=f(x)$ のときの解 $u(t,x)$ を汎関数積分として

$$u(t,x)=\int K^E(t,x;0,y)f(y)dy$$
$$=\int_{C_0} e^{-\int_0^t V(x+X_0(\tau))\,d\tau} f(x+X_0(t))d\mu(X_0) \tag{10}$$

と表示した．これを**ファインマン・カッツ**(Feynman–Kac) **公式**と言う．基本解・熱核 $K^E(t,x;0,y)$ は条件付ウィーナー測度でも書けるが，分りやすいので，(10) の関数 f として敢えてやや形式的に超関数であるデルタ関数 $f(y)=\delta(y-x)$ をとると*2)，

$$K^E(t,x;0,y)=\int_{C_0} e^{-\int_0^t V(x+X_0(\tau))\,d\tau} \times\delta(y-x-X_0(t))\,d\mu(X_0) \tag{11}$$

を得る．もちろん，これをまた (6) のような時間分割近似極限としても書ける．そしてこの先の話は，数学における確率解析の分野になる．

もっと一般の場合の (7) についても，やさしい話ではないが，ユークリッド化を行う等大体同様な筋で議論がなされ，平衡統計力学や構成的場の量子論の問題になる．この節の内容について文献 12) にもう少し詳しく書いたが，より詳しくは，文献 2, 3, 7) 等を見られたい．

4. いかに使われているか

経路積分 (3) や (5) を，経路や場たちの空間上の可算加法的測度を構成し積分として意味付けることは，虚数時間の場合やユークリッド化した場合の他はあまり成功していない．色々の観点からの工夫をこらしたアプローチがあるが，その中で，前節でも触れた時間分割近似や時空の格子近似の極限としては一応意味が付く．この方法は計算手段としても威力を発揮し量子物理学の計算では多く使われているようだ．

以下で，経路積分が「いかに使われているか」について具体例を 4 つだけ，分りやすいので敢えて少し大胆で “heuristic” 風に述べよう．

(i) 準古典近似　(4) を作用 $S(X)$ とする経路積分 (5) を，簡単のために $s=0$ とおいて改めて

$$K(t,x;0,y)=\int_{X:X(0)=y,X(t)=x}\mathcal{D}[X] \times e^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t[\frac{1}{2}\dot{X}(\tau)^2-V(X(\tau))]d\tau} \tag{12}$$

とする．表示 (12) は，形式的な推論によってではあるが，量子力学が作られた原理である「準古典極限 $\hbar\to 0 \;\Rightarrow\;$ 古典力学」を直接説明する威力を持ち，直ちにそれを見ることができる．もしこの ‘積分’ において停留位相の方法が有効であるとすれば，$\hbar$ が小さいので，この ‘積分’ には，作用 $S(X)=\int_0^t[\frac{1}{2}\dot{X}(\tau)^2-V(X(\tau))]d\tau$ を停留にする経路，すなわち，先に述べた古典力学の運動方程式を満たす古典軌道 $X_{\rm cl}$，の周りの経路たちからの寄与が大部分を占めることになるからである．従って，$X(\tau)=X_{\rm cl}(\tau)+Y(\tau)$, $Y(0)=Y(t)=0$ とおき $S(X)$ を $X_{\rm cl}$ の周りで考えると，

$$K(t,x;0,y)=e^{iS(X_{\rm cl})/\hbar}\int_{Y:Y(0)=Y(t)=0}\mathcal{D}[X] \times e^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t[\frac{1}{2}\dot{Y}(\tau)^2-\frac{1}{2}V''(X_{\rm cl}(\tau))Y(\tau)^2+O(Y(\tau)^3)]d\tau} \tag{13}$$

を得る．この右辺の経路積分を (6) のような時間分割近似の極限として計算すると，主要項は $\frac{e^{iS(X_{\rm cl})/\hbar}}{\sqrt{2\pi i\hbar}}\sqrt{-\frac{\partial^2 S(X_{\rm cl})}{\partial y\partial x}}$ になる．$S(X_{\rm cl})$ は古典軌道 $X_{\rm cl}(\tau)$ の両端 y, x の関数になる．t が小さいとき $(0,y), (t,x)$ を結ぶ古典軌道は 1 本しかない．この辺のことに関して藤原[5)]に時間分割近似による精緻な解析がある．

(ii) 量子力学的分配関数　(5) や (7) で虚数時間に移行，またはユークリッド化したもの，ここでは前者である (8), (11) で考えよう．(1) の右辺のシュレーディンガー作用素 $H:=-\frac{\hbar^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x)$

*2)　もちろん，その後の確率論の「マリアヴァン解析」によって正当化されている．

において，ポテンシャル $V(x)$ は下に有界で無限遠方で増大する適当に滑らかな関数とする．H の固有値たちを $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ とする．$\beta = 1/k_B T$ を逆温度として（k_B はボルツマン定数，T は絶対温度），$Z(\beta) := \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta E_n}$ を量子力学的分配関数と言う．$Z(\beta) = \mathrm{Tr}\, e^{-\beta H}$ とも書けるが，いまの場合，$Z(\beta) = \int K^E(\beta, x; 0, x) dx$ となる．ただし，この $K^E(\beta, x; 0, x)$ は表示 (11) で $\hbar$ を回復したものであり，$\hbar x$ を x に変数変換すると，

$$Z(\beta) = \frac{1}{\hbar}\int dx \int_{C_0} d\mu(X_0) \times e^{-\int_0^\beta V(x+\hbar X_0(\tau))d\tau}\delta(X_0(\beta)) \quad (14)$$

を得る．$\int_{C_0}\delta(X_0(\beta))d\mu(X_0) = \frac{1}{(2\pi\beta)^{1/2}}$ だから，準古典極限 $\hbar \to 0$ をとると，

$$\lim_{\hbar\to 0} \hbar Z(\beta) = \frac{1}{(2\pi\beta)^{1/2}} \int e^{-\beta V(x)} dx = \iint e^{-\beta(\frac{p^2}{2}+V(x))}\frac{dxdp}{2\pi}$$

となり，$\frac{p^2}{2}+V(x)$ が古典力学のハミルトニアンだから，極限が古典分配関数となることが実に簡単に得られた．さらに，$e^{-\int_0^\beta V(x+\hbar X_0(\tau))d\tau}$ を $\hbar$ のベキにテイラー展開すると，いとも容易に $Z(\beta)$ の $\hbar$ ベキ展開

$$Z(\beta) = \frac{1}{(2\pi\beta)^{1/2}\hbar}[Z_0 + \hbar^2 Z_2 + \hbar^4 Z_4 + \cdots]$$

も得られる．右辺 $[\cdots]$ 内 $\hbar$ 奇数ベキ項は消える．

(iii) 固有値の漸近的性質　上の (ii) と同じシュレーディンガー作用素 H を $\hbar = 1$ として考える．実数 E に対して，$A(E)$ を位相空間の領域 $\left\{(x,p);\ \frac{p^2}{2}+V(x)<E\right\}$ の面積とし，$N(E) := \sum_{E_n<E} 1$ を E より小さい H の固有値 E_n たちの個数とする．(14) から，$\beta\to 0$ のとき，

$$\int e^{-\beta E}dN(E) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta E_n} = \int K^E(x,\beta;0,x)dx \sim \frac{1}{(2\pi\beta)^{1/2}}\int e^{-\beta V(x)}dx = \frac{1}{2\pi}\int e^{-\beta E}dA(E)$$

を得る．従ってタウバー (Tauber) 型定理[*3)] より，

$$N(E) \sim \frac{A(E)}{2\pi}, \quad E\to\infty, \qquad (15)$$

が従い，$E = E_n$ とおくと，$A(E_n) \sim 2\pi n$ を得る．$A(E_n) = 2\pi n$ がプランク (M. Planck) が初めて物理学に導入した量子仮説であることを思い出そう．(15) の上の証明は短く分りやすいが，厳密な証明はやさしくない．標準的な (15) を示すやり方は空間 1 次元的な WKB 法であるが，上の方法は一般の N 次元でも有効である．

(iv) 摂動論　再び (12) から，摂動計算の方法が簡単に得られることを見よう．$e^{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t V(X(\tau))d\tau}$ をテイラー展開し (12) に代入して，(6) のように時間分割近似で計算すると，

$$\begin{aligned} K(t,x;0,y) &= \int_{X:X(0)=y,X(t)=x} \mathcal{D}[X] \\ &\times e^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t \frac{1}{2}\dot{X}(\tau)^2 d\tau}\left[1+\left(\frac{-i}{\hbar}\right)\int_0^t V(X(\tau))d\tau \right. \\ &\left. +\frac{1}{2!}\left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2\left(\int_0^t V(X(\tau))d\tau\right)^2+\cdots\right] \\ &= K_0(t,x;0,y) \\ &-\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt_1\int K_0(t,x;t_1,x_1)V(x_1)K_0(t_1,x_1;0,y)dx_1 \\ &-\frac{1}{\hbar^2}\int_0^t dt_2\int_0^{t_2}dt_1\iint K_0(t,x;t_2,x_2)V(x_2) \\ &\times K_0(t_2,x_2;t_1,x_1)V(x_1)K_0(t_1,x_1;0,y)dx_1dx_2 \\ &+\cdots \end{aligned} \qquad (16)$$

を得る．この展開の最初の第 0 項 $K_0(t,x;0,y) = \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{2i\hbar t}}}{(2\pi i\hbar t)^{1/2}}$ は相互作用なし（ポテンシャル $V\equiv 0$ のとき）の項である．次の第 1 項以下は相互作用の様子を表しており，実際，第 n 項は n 個のポテンシャル V たちが $n+1$ 個の K_0 たちの積の間に 1 つずつ入っている．V が $\hbar$ に比べて小さければ適当に有限項までをとればよい近似を与えるだろう．上のような展開をスカラー場の量子論，量子電磁力学で行えば，展開の各項に対応するものがかの有名な**ファインマン・グラフ** (Feynman graphs)，あるいは**ファインマン図形** (Feynman diagrams) になる．摂動計算をどの項も忘れないで見通しよく効率的に計算できる手段を与えたの

*3)　例えば，文献 7) Theorem 10.3 (p.108)，または，高橋陽一郎『漸近挙動入門—太鼓の形を聴くために』（日本評論社，2002）をこの辺の話題も込めて参照．

である．これはファインマンも自ら誇る応用の現場で最もよく使われているものの一つであろう．

5. 足しあげる

経路積分は，経路に沿う古典力学の作用を指数関数の肩にのせて，経路すべて——運動方程式を満たすものも満たさないものも——にわたって同じウエイトで 足しあげる ものであった．同じような足しあげるやり方は統計力学にもある．

前節までは $\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^N$ を $d=N=1$ で考えたが，一般の d, N でも同様である．$\mathbf{R}^d$ と $\mathbf{R}^N$ の代わりに，d 次元正方格子 $\mathbf{Z}^d$ とスピンの状態 S をとると平衡統計力学の古典的な磁性体模型になる．いま $S=\{-1,+1\}$ とするスピン配置 $\sigma: \mathbf{Z}^d \to \{-1,+1\}$ の下で，有限な部分格子 Λ 上のスピンたちのエネルギーを $E_\Lambda(\sigma) = -J\sum_{\langle jk\rangle,\, j,k\in\Lambda}\sigma_j\sigma_k$ で定めると，最も簡単なイジング (Ising) 模型になる．ただし，$\sum_{\langle jk\rangle,\, j,k\in\Lambda}$ は，$j,k\in\Lambda$ で最隣接スピン対についての和を意味する．$J>0\,(J<0)$ のとき強磁性的（反強磁性的）と言う．このときギブズ (Gibbs) 分布 $e^{-\beta E_\Lambda(\sigma)}$（$\beta$ は逆温度）を Λ 上の配置すべてにわたって足しあげた $Z_\Lambda(\beta) = \sum_{\sigma:\Lambda\to\{-1,+1\}} e^{-\beta E_\Lambda(\sigma)}$ を分配関数と言う．これより $\frac{e^{-\beta E_\Lambda(\sigma)}}{Z_\Lambda(\beta)}$ の $\Lambda\uparrow\mathbf{Z}^d$ のとき極限としてギブズ測度が得られることになる．熱力学的諸性質はこれより従う．スピンの 1 つの配置 σ は格子 $\mathbf{Z}^d$ 上の $\{-1,+1\}$ 値関数であり，$d=1$ なら経路，$d\geq 2$ なら場と思うこともできるので，経路積分と同じような足しあげを行っている．

6. おわりに

数理物理に現れるすべての微分方程式には，必ずしも成功しなかったようだが，経路積分が関係しているのではないかと考えられたことがあった．この関連で，流体力学という全く違う分野においてホップフ (E. Hopf)[9]が本稿で述べたのと同じような汎関数積分的アプローチを所謂**ホップフ方程式**に対して行ったことに触れておく．それは，速度場のナヴィエ・ストークス方程式そのものではないが，速度場たちの位相空間上の確率測度の特性汎関数に対する発展方程式のことで，彼は初期値問題を定式化して解こうとしたが未完に終わったようだ．後に，ラジゼンスカヤ (O.A. Ladyzhenskaya) とベルシック (A.M. Vershik)[9]がこのホップフ方程式の解の存在を証明した．

7. 文献について

文献 1) は，ファインマンの 1942 年学位論文 “The principle of least action in quantum mechanics” と文献 2) そしてファインマンが経路積分のアイディアの示唆を受けたディラック (P.A.M. Dirac) の論文 “The Lagrangian in quantum mechanics”, *Physik. Zeits. Sowjetunion* **3** (1933), も一緒に収録された有難い一書．文献 3) は経路積分が詳述された教科書．経路積分について学ぶなら，この文献 1～3) はいずれ手に取らなければならないであろう．文献 4) はファインマン自身が，一般聴衆を前に量子電磁力学を経路積分に拠って式を殆ど使わず鮮やかに解説した講演に基づく感動的な名著．ただ，図はたくさんあるが，内容はちょっと上級であり所謂一般向けのサイエンス読み物ではない．文献 5) は経路積分の時間分割近似法によるシュレーディンガー方程式の基本解構成を詳述したハードアナリシスの上級数学書．文献 6) は経路積分のことも要点が初等的に大変やさしく語りかけるように書かれた好著．文献 7) は場の量子論も視野に入れて，主にウィーナー測度に基づいた経路積分・汎関数積分について書かれ，確率論の知識があまりなくても読める好著．文献 8) は必ずしも読みやすくはないが，経路積分について学ぶよりも，それに関する各種の話題の概観を得るために役立つであろう．本稿を書くに当たり，文献 1～3) に加えて特に文献 10, 11) を参考にした．

最後に，5 節「足しあげる」について議論して頂いた方々に深く感謝致します．非力のためそれ

を書き切れず心残りのうちに擱稿を終わる.

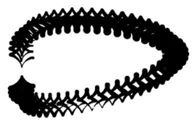
参考文献

1) "Feynman's Thesis – A New Approach to Quantum Theory", L.M. Brown 編, World Sci. 2005.
2) R.P. Feynman, "Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics", *Rev. Mod. Phys.* **20** (1948), pp.367–387.
3) R.P. Feynman and A.P. Hibbs, "Quantum Mechanics and Path Integrals", McGraw-Hill 1965 [和訳:『量子力学と経路積分』, 北原訳, みすず書房].
4) R.P. ファインマン, 『光と物質のふしぎな理論 私の量子電磁力学』, 釜江・大貫訳, 岩波書店, 1987.
5) 藤原大輔, 『ファインマン経路積分の数学的方法—時間分割に拠る近似法』, シュプリンガー・ジャパン, 1999.
6) 竹内薫, 『『ファインマン物理学』を読む—量子力学と相対性理論を中心として』, 講談社, 2004.
7) B. Simon, "Functional Integration and Quantum Physics", Academic Press 1979.
8) L.S. Schulman, "Techniques and Applications of Path Integration", Dover Publ. 2005; An expanded republication of the work originally published by John Wiley & Sons 1981.
9) E. Hopf, "Statistical hydromechanics and functional calculus", *J. Rat. Mech. Anal.* **1** (1952), pp.87–123; O.A. Ladyzhenskaya and A.M. Vershik, "Sur l'évolution des mesures déterminées par les équations de Navier–Stokes et la résolution du problème de Cauchy pour l'équation statistique de E. Hopf", *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, Cl. Sci. (4) **4** (1977), no.2, pp.209–230.
10) I.M. Gelfand and A.M. Yaglom, "Integration in functional spaces and its applications in quantum physics", *J. Math. Phys.* **1** (1960), pp.48–69.
11) M. Kac, "Wiener and integration in function spaces", *Bull. Amer. Math. Soc.* **72**, Part II (1966), pp.52–68; "Integration in Function Spaces and Some of Its Applications", Lezioni Fermiane, Accademia Nazionale del Lincei Scuola Norm. Sup. Pisa 1980.
12) 一瀬孝, 「Path Integral 入門」, 『数理物理への誘い』(江沢洋編), pp.88–110, 遊星社, 1986; 「経路積分—解析学の立場から」, SGC ライブラリ『数学の未解決問題—21 世紀数学への序章』, pp.72–80, サイエンス社, 2003.

(いちのせ・たかし, 金沢大学名誉教授)

粘性解と数理ファイナンス

確率制御の視点から



貝瀬　秀裕・関根　順

1. はじめに

本稿では，確率最適制御を通じて，偏微分方程式における粘性解と数理ファイナンスの問題を紹介することが目標である．では，なぜ制御とファイナンスが関係あるのだろう？

制御理論は主に工学的な対象を制御することを想定しているが，実はそこには工学に留まらない普遍的なアイデアが含まれている．その一つがシステムという考え方で，システムとはある現象・事物をひとまとまりと見なしたとき，それに対する外からの作用（入力）に対して，その結果として得られる作用（出力）を伴う対象物のことである．図１のようにシステムをブラックボックスとして表現すれば，ブラックボックスに何か入力すると，それに応じた出力が得られるものとして理解できる．

数理ファイナンスで扱われる株式市場も，実はシステムと解釈することができる．例えば，投資家が資産を運用するために，株式市場において様々な銘柄の株式に資産を投資（入力）すると，株式の価格変動の結果として利得（出力）を得ることができるので，この意味で株式市場もシステムということができよう．ただし，株式市場においては株式の価格変動が不確実なため，決まった投資に対して確実な利得を得ることは難しい．このような状況において，ノイズなどの不確実な要素を確率論を用いてモデル化したシステムが確率的システムで，この枠組みでシステムを考えていこう．

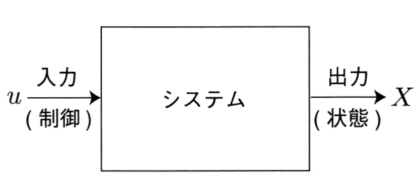


図１　システムの概念図．

通常，システムの状態は，過去の作用の影響を受けながら未来とは独立に，時間の経過とともに変化していくと考えられる．株式市場の例でも，投資家の過去の投資行動が現時点での資産を決定し，絶えず投資を行っていくことで資産は未来に向かって変化していく．システムを記述するにはそのような性質を反映する数学形式が必要となってくるが，本稿ではシステムを確率微分方程式を使って表すことにする．

本稿の前半では，細かい仮定・議論は気にせず，一般的な確率的システムに対して，古典的な確率最適制御の基本アイデアを説明し，確率的システムにおける粘性解理論と確率最適制御の関係を述べる．

後半では，前半の最適制御の一般論を２つの数理ファイナンスの問題に適用する．まず典型的な最適投資・消費問題を紹介し，最後にデリバティブの価格付け問題に関連して，市場モデルにおける未知パラメータに応じて起こり得るシナリオを制御する問題を考える．

2. 確率最適制御と Hamilton–Jacobi–Bellman 方程式

時刻 s におけるシステムの状態を，n 個の確率変数の組 $X_s = (X_s^1, \cdots, X_s^n)^\top$ で表し*1)，さらに，時間の経過にともなう変化を扱うために，X_s を時刻 s を動かして集めてきた集合 $X = \{X_s\}$ を考えよう．このように時間パラメータで添え字付けられた確率変数（ベクトル）の集合は確率過程と呼ばれている．$U \subset \mathbb{R}^m$ に値を取る制御確率過程 $u = \{u_s\}$（入力）に対して，システムの状態 $X = \{X_s\}$（出力）は次の確率微分方程式

$$dX_s^i = f^i(s, X_s, u_s)ds + \sum_{j=1}^{d} \sigma^{ij}(s, X_s, u_s)dW_s^j, \quad X_t^i = x^i \tag{1}$$

$(1 \le i \le n,\ s \in [t, T])$ によって支配されているものとする．ここで，$T > 0$ は予め与えられた終末時刻で，$t \in [0, T]$ は初期時刻，$x = (x^1, \cdots, x^n)^\top \in \mathbb{R}^n$ は初期状態を表し，$W = \{W_s\}$ $(W_s = (W_s^1, \cdots, W_s^d)^\top)$ はノイズを表す確率過程で d 次元 Brown 運動とする．図 1 を使って理解すると，$u = \{u_s\}$ を与える（入力する）ごとに，(1) を通じて $X = \{X_s\}$ が決定される（出力される）と考えられる．

ここでもし，すべての i, j に対して $\sigma^{ij} \equiv 0$ であれば，

$$\frac{dX_s^i}{ds} = f^i(s, X_s, u_s), \quad X_t^i = x^i$$

となり，通常の常微分方程式が得られる．(1) はこれにノイズ項を加えた式であると解釈される．また，Brown 運動の性質を用いると，微小時間区間 $[s, s + ds]$ における増分 $dX_s^i \approx X_{s+ds}^i - X_s^i$ について

$$E_s[dX_s^i] = f^i(s, X_s, u_s)ds$$

（E_s は s までの情報の下での条件付き期待値）や

$$\mathrm{cov}_s(dX_s^i, dX_s^j)$$

$$= \mathrm{cov}_s\left(\sum_{k=1}^{d} \sigma^{ik}(s, X_s, u_s)dW_s^k, \sum_{l=1}^{d} \sigma^{jl}(s, X_s, u_s)dW_s^l\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{d} \sigma^{ik}(s, X_s, u_s)\sigma^{jk}(s, X_s, u_s)ds$$

（cov_s は時刻 s までの情報の下での条件付き共分散）が得られるので，f^i や σ^{ij} でシステムの平均や分散の構造が定められていることが分かる*2)．

次に，システムをある意味で望ましい状態に制御する問題を考えてみよう．「ある意味で望ましい」とは，予め設定した "物差し"（基準）の下で $u = \{u_s\}$（入力）をうまく取ることで $X = \{X_s\}$（出力）をベストな状態にすることを意味する．具体的には，システムに対する基準としては次の評価関数を導入する：

$$J(t, x; u) = E\left[\int_t^T \beta_{t,r}^{X,u} l(r, X_r, u_r)dr + \beta_{t,T}^{X,u} \Phi(X_T)\right].$$

ここで，$\beta_{t,r}^{X,u} = \exp(-\int_t^r k(\tau, X_\tau, u_\tau)d\tau)$ とし，$l(r, x, u)$, $\Phi(x)$, $k(r, x, u)$ は基準を定める所与の関数で，$k(r, x, u)$ は非負とする．制御（入力）とシステムの状態（出力）は確率的にランダムに変動するので，それらから決まる尺度の期待値を基準としようというのである．確率最適制御とは，評価関数 $J(t, x; u)$ を制御確率過程 $u = \{u_s\}$ を動かして最大化（最適化）する問題のことである．したがって，評価関数の最大値（最適値）として定義される初期値 (t, x) についての関数（値関数）

$$V(t, x) = \sup_u J(t, x; u)$$

を考えることが基本的となる．

ここで，次の問題を考えよう：

- $V(t, x)$ が満たす関係式の導出と特徴付け
- $V(t, x)$ を実現する最適制御の構成

後者の問題に関しては，後述する Hamilton–Jacobi–Bellman 方程式の滑らかな解を用いた構成法などがあるが*3)，本稿では粘性解理論との関

*1) $(\cdot)^\top$ でベクトルや行列の転置を表す．

*2) これらの説明は形式的なものであり，厳密な定式化については確率解析の教科書を参照されたい[5,8,11]．

*3) 最適制御の構成については文献 4, 7, 11, 12) を参照．

係に焦点を当てるため，前者の問題についてのみ考えることにする．

まず，$V(t,x)$ が満たす関係式として，次の Bellman 原理[*4)]が適当な条件の下で成り立つことが知られている[*5)]．

定理 1（Bellman 原理） 値関数 $V(t,x)$ は次を満たす：$0 \le t < s \le T$, $x \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$V(t,x)=\sup_u E\left[\int_t^s \beta_{t,r}^{X,u} l(r,X_r,u_r)dr + \beta_{t,s}^{X,u} V(s,X_s)\right], \quad (2)$$

$$V(T,x)=\Phi(x). \quad (3)$$

Bellman 原理は，時間区間 $[t,T]$ における最適化問題 $V(t,x)$ を，部分区間 $[t,s]$ と $[s,T]$ 上の最適化問題に分けることができることを示している．また，原理的には (3) を終末条件として，(2) を用いて時間に関して遡ることで $V(t,x)((t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n)$ が計算できることを意味しているが，実質，(2)–(3) を使って $V(t,x)$ を計算することは困難なので，Bellman 原理から導かれる偏微分方程式が重要となってくる．

$V(t,x)$ に対する偏微分方程式を導出するため，$V(t,x)$ が $C^{1,2}$ 級（$t\in[0,T]$ に関して 1 回，$x\in\mathbb{R}^n$ に関して 2 回連続微分可能）と仮定してみよう．このとき，(2) における $\beta_{t,s}^{X,u}V(s,X_s)$ に対して，$V(t,x)$ の滑らかさの仮定から伊藤の公式[*6)]と呼ばれる確率過程に関する連鎖律（合成関数の微分公式）が使えて，Bellman 原理の無限小版である次の非線形偏微分方程式を導くことができる[*7)]：

$$-\frac{\partial V}{\partial t}+F(t,x,V,D_xV,D_x^2V)=0. \quad (4)$$

ここで $D_xV=(\partial V/\partial x^1,\cdots,\partial V/\partial x^n)^\top$, $D_x^2V=(\partial^2 V/\partial x^i\partial x^j)_{1\le i,j\le n}$ とし，$t\in[0,T], x,p\in\mathbb{R}^n, r\in\mathbb{R}$, n 次対称行列 S についての関数 $F(t,x,r,p,S)$ を次のように定義する：

$$\begin{aligned}F(t,x,r,p,S) &= -\sup_{u\in U}\Big\{\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\sigma\sigma^\top(t,x,u)S\right)+f(t,x,u)\cdot p \\ &\quad +l(t,x,u)-k(t,x,u)r\Big\}, \quad (5)\end{aligned}$$

$$f(t,x,u)=\left(f^1(t,x,u),\cdots,f^n(t,x,u)\right)^\top,$$
$$\sigma(t,x,u)=\left(\sigma^{ij}(t,x,u)\right)_{1\le i\le n,1\le j\le d}.$$

(4) は $V(t,x)$ を特徴付ける偏微分方程式であり，Hamilton–Jacobi–Bellman 方程式（以下，HJB 方程式と省略する）と呼ばれている．

ところで，(4) を導出するには伊藤の公式を用いるため $V(t,x)$ が $C^{1,2}$ 級であることを確かめなければならないが，一般に直接 $V(t,x)$ の滑らかさを示すのは難しいことが知られている．そればかりか，$\sigma(t,x,u)$ が退化している（$\sigma\sigma^\top(t,x,u)$ が正定値とならない t,x,u が存在する）とき，$V(t,x)$ が滑らかとならない例は多数存在し，一般的な状況の下で値関数の滑らかさは期待できない．数理ファイナンスで現れる最適化問題はまさにこの退化しているケースで，一般的な設定の下では微分できるとは限らない関数まで意味を拡げて解と解釈する必要がある．このように通常の滑らかな解を拡張した解は弱解と呼ばれ，HJB 方程式のように強い非線形性を持つ非線形偏微分方程式に対して強力な手段を与える弱解理論が粘性解である．次節では粘性解と Bellman 原理が整合的であることを見ていこう．

3. 粘性解と値関数の特徴付け

粘性解の概念は 1980 年代初頭に Crandall と Lions[3)]によりまず 1 階非線形偏微分方程式に対して導入され，その後直ちに 2 階非線形偏微分方程式に拡張された．現在に至るまで，一般的な 2 階非線形偏微分方程式に対する粘性解の存在・一意性などの基本定理，また様々な手法，応用が活発に研究されている．ここでは HJB 方程式 (4) に

*4) Dynamic Programming Principle とも言う．
*5) 厳密に証明するには与えられた制御問題を適当に捉え直す必要がある．詳しくは文献 4, 7, 11, 12) を参照．
*6) 確率解析の教科書[5, 8, 11)]を参照．
*7) 議論の詳細は，例えば文献 12, 15) などを参照．

対してのみ粘性解理論を適用してみよう[*8]．

$F(t,x,r,p,S)$ は連続とし，必ずしも連続とは限らない粘性解の定義を述べるため，$[0,T)\times\mathbb{R}^n$ 上の局所有界[*9]な関数 $w(t,x)$ に対して，下半連続包 $w_*(t,x)=\liminf_{s\to t,y\to x} w(s,y)$，上半連続包 $w^*(t,x) = \limsup_{s\to t,y\to x} w(s,y)$ を導入する．$w(t,x)$ が連続であることと，$w^*(t,x)=w_*(t,x)$ が同値であることに注意しよう．

定義 2　$[0,T)\times\mathbb{R}^n$ 上の局所有界関数 $w(t,x)$ が次の条件を満たすとき，$w(t,x)$ を (4) の粘性優解と言う：$\varphi(t,x)$ を $[0,T)\times\mathbb{R}^n$ 上の任意の $C^{1,2}$ 級関数とするとき，$(\hat{t},\hat{x})\in[0,T)\times\mathbb{R}^n$ が $w_*(t,x)-\varphi(t,x)$ の $w_*(\hat{t},\hat{x})=\varphi(\hat{t},\hat{x})$ となる $[0,T)\times\mathbb{R}^n$ における最小点ならば

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial t}(\hat{t},\hat{x}) + F\big(\hat{t},\hat{x},w_*(\hat{t},\hat{x}),D_x\varphi(\hat{t},\hat{x}),D_x^2\varphi(\hat{t},\hat{x})\big)\geq 0 \quad (6)$$

が成り立つ．粘性優解の定義において，$w_*(t,x)$ を $w^*(t,x)$，最小点を最大点，(6) における不等号 $\geq$ を $\leq$ で置き換えた条件を $w^*(t,x)$ が満たすとき $w(t,x)$ を粘性劣解と言い，$w(t,x)$ が粘性優解かつ粘性劣解のとき粘性解と言う．

弱解理論においては未知関数は必ずしも微分できるとは限らないので，偏導関数を適当な意味で解釈し直す必要がある．粘性優解の定義においては，$\varphi(t,x)$ の条件が $\varphi(t,x)\leq w_*(t,x)$ $((t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n)$，$\varphi(\hat{t},\hat{x})=w_*(\hat{t},\hat{x})$ と同値であることに注意すると，未知関数 $w_*(t,x)$ を図 2 のように $(\hat{t},\hat{x})$ で下からタッチする滑らかなテスト関数 $\varphi(t,x)$ の偏導関数で代用するところがポイントである．

さて，$V(t,x)$ を (4) の粘性解として特徴付けてみよう．Bellman 原理から HJB 方程式を導くとき問題だったことは，$V(t,x)$ が滑らかか分からないために伊藤の公式が使えなかった点であった．そこで，$V(t,x)$ の微分可能性の問題を回避するため，$V(t,x)$ を図 2 のように滑らかなテスト関数 $\varphi(t,x)$ で下から近似して，Bellman 原理 (2) において $t=\hat{t}$, $x=\hat{x}$ とし，$\beta^{X,u}_{\hat{t},s}V(s,X_s)$ の代わりに $\beta^{X,u}_{\hat{t},s}\varphi(s,X_s)$ に対して伊藤の公式を用いることで (6) を示すことができる[*10]．(6) で不等号が出てくるのは，$V(t,x)$ を $\varphi(t,x)$ で下から近似したためである．$V(t,x)$ が粘性劣解になることも同様のアイデアである．

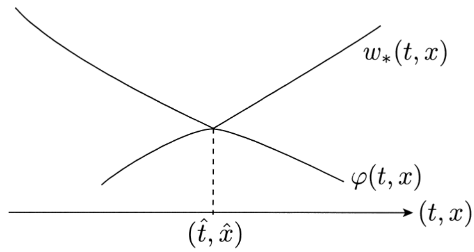


図 2　粘性優解とテスト関数の関係のイメージ図．

定理 3（値関数の特徴付け）　適当な条件の下で，値関数 $V(t,x)$ は HJB 方程式 (7) の粘性解である：

$$-\frac{\partial V}{\partial t} + F(t,x,V,D_xV,D_x^2V)=0,\quad (t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n. \quad (7)$$

$V(t,x)$ の定義から直ちに分かる等式 $V(T,x)=\Phi(x)$ $(x\in\mathbb{R}^n)$ に注意すると，$V(t,x)$ は終末条件 $V(T,x)=\Phi(x)$ とする HJB 方程式 (7) の Cauchy 問題に対する粘性解である．通常の確率制御問題においては，$V(t,x)$ の連続性などの良い性質，HJB 方程式の解の比較定理（一意性）を使うと，$V(t,x)$ が Cauchy 問題の一意的な粘性解として特徴付けられる[4,11]．しかし，数理ファイナンスで現れる最適化問題はある種の特異制御問題になることがあり，値関数が連続とならないケースがあるため，終末条件の扱いは非常にデリケートな問題である[15]．

4. 最適投資・消費問題

数理ファイナンスでは，資産価格の推移を表す

*8)　一般論は文献 2) を参照．

*9)　$w(t,x)$ が $[0,T)\times\mathbb{R}^n$ の任意の有界閉集合上で有界のとき $[0,T)\times\mathbb{R}^n$ で局所有界と言う．

*10)　議論の詳細は文献 4, 11, 15) を参照されたい．

確率過程を用いて金融市場のモデルを構成し，金融市場の現象を議論する．例えば，確率微分方程式

$$dS_s^i = S_s^i\left(\mu^i ds + \sum_{j=1}^n \sigma^{ij} dW_s^j\right), \qquad (8)$$

$(s \geq t,\, S_t^i > 0,\, i = 1, \cdots, n)$ で第 i 銘柄の株価過程を与えてみよう．ここで $\mu = (\mu^1, \cdots, \mu^n)^\top \in \mathbb{R}^n$, $\sigma = (\sigma^{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ は $n \times n$-可逆行列，$W = (W^1, \cdots, W^n)^\top$ は n 次元 Brown 運動である．

次に，時刻 t に初期投資額 x（円）を持って，以後安全運用と n 銘柄の株への投資を組み合わせて刻々と行ってゆく投資家のモデルを考えてみよう．時刻 s に，第 i 銘柄に保有資産総額の比率 π_s^i 投資し，残りの比率 $1 - \sum_{i=1}^n \pi_s^i$ を（銀行に預け）安全に運用すると，微小時間区間 $[s, s+ds]$ で

保有第 i 銘柄株の変化額が $\dfrac{\pi_s^i X_s}{S_s^i} dS_s^i$,

銀行預金分の変化額が $\left(1 - \sum_{i=1}^n \pi_s^i\right) X_s r ds$

と表される．ここで，X_s で時刻 s の保有資産総額を，r で銀行預金金利を表している．更にこの投資家が c_s（円）消費することにすると，結局，投資家の保有資産総額の微小時間変化が

$$\begin{aligned} dX_s =& X_s\left\{\sum_{i=1}^n \pi_s^i \frac{dS_s^i}{S_s^i}\right. \\ &\left. + \left(1 - \sum_{i=1}^n \pi_s^i\right) r ds\right\} - c_s ds, \end{aligned} \qquad (9)$$

$(s \geq t, X_t = x)$ と確率微分方程式を用いて表される．投資と消費：$u_s = (\pi_s, c_s)$ $(\pi_s = (\pi_s^1, \cdots, \pi_s^n))$ は投資家が制御するものとみなして，(8)–(9) を組み合わせて整理すれば，X が (1) の形で（適当な f, σ を用いて）表されることがわかる．

ファイナンスにおける典型的最適化問題としては，Merton[9] に始まる最適投資・消費問題が筆頭に挙げられよう．これは，投資 π と消費 c に関する最適制御問題：

$$V(t,x) = \sup_{(\pi,c)} J(t,x;\pi,c)$$

のことである．ただし

$$\begin{aligned} J(t,x;\pi,c) =& E\left[\int_t^T \mathrm{e}^{-\rho(s-t)} U_1(c_s) ds\right. \\ &\left. + \mathrm{e}^{-\rho(T-t)} U_2(X_T)\right] \end{aligned} \qquad (10)$$

と置いている．ここで，$T > 0$ は終末時間を表す定数であり，$U_i : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ は効用関数であり，例えば

$$\begin{aligned} &U_i \in C^2((0,\infty)),\ U_i' > 0,\ U_i'' < 0, \\ &U_i'(0+) = \infty,\ U_i'(\infty) = 0 \end{aligned} \qquad (11)$$

を満たすものとする*11)．したがって，(10) は各時刻 $s(\in [t,T])$ の消費量の効用 $U_1(c_s)$ を足し合わせて期待値を採ったものと，終末時刻 T での保有資産総額の効用 $U_2(X_T)$ の期待値の和と解釈される（$\rho(\geq 0)$ は時刻 t での現在価値に換算するための割引率である）．

この最適投資・消費問題は，Merton による先駆的研究以後，膨大な数の発展研究が様々な設定で行われている．2–3 節の議論にしたがえば，値関数 V が，対応する HJB 方程式の（粘性）解として特徴付けられることがわかる．実は，上記の (8)–(11) を用いた基本的な設定下では，2 節で行った議論で導かれる HJB 方程式 (4)–(5) は滑らかな解を持つことがわかっているのだが*12)，より一般化した問題を議論する際には，粘性解の概念が必要になる．具体的には，例えば，

- (8) の株価過程を一般化したり，金利も確率過程でモデル化すること，
- (9) に投資・消費・保有資産額変化などに関する制約・制限を加えること（現実には無制限に投資・消費ができることはないし，リスク管理の観点からは資産額の低下に制約をおくことは重要である），売買の際生じるコストを考慮すること，
- (10) に負債や給与の項を加えたり，終末時刻 T をランダムな時刻にとること，
- (11) の仮定を緩めること，

*11） 条件 (11) が満たされる典型的な例としては，冪効用関数 $U(x) = x^\gamma/\gamma$ $(\gamma < 1, \neq 0)$ や対数効用関数 $U(x) = \log x$ などが挙げられる．

*12） 例えば文献 6) の第 3 章など参照．

などといった一般化が扱われている*13).

ところで，最適投資・消費問題を投資家の意思決定に役立てようと考えるならば，最大期待効用を実現する，

$$V(t,x) = J(t,x;\hat{\pi},\hat{c}),$$

最適投資・消費戦略 $(\hat{\pi},\hat{c}) = (\hat{\pi}_t,\hat{c}_t)_{t\in[0,T]}$ を求めることは，ある意味，値関数 V を求める以上に重要である．例えば $V(\cdot,\cdot)$ が滑らかであるときは，伊藤の公式を適用して V の微分を用いた最適投資・消費戦略の表現が得られる．また，十分な滑らかさが得られないときでも，伊藤の公式を拡張して*14)適用して，最適制御が構成できる場合がある．一方，最適投資・消費戦略の構成が未だ成されていない（値関数 V の満たす HJB 方程式の粘性解の存在や一意性までしか議論されていない）問題も多々あり，この点は更なる研究が必要であると思われる．

5. 不確定ボラティリティモデル

最適投資・消費問題以外にも，数理ファイナンスには，確率制御の手法が必要不可欠な問題が沢山存在する．本節では，デリバティブの価格付け問題に現れる確率制御問題を1つ紹介してみよう．

前節の設定 (8) で $n=1$（すなわち，株式が1銘柄のみ存在している）とした状況を想定する．$S=S^1, \mu=\mu^1, W=W^1$ と記し，株価過程を

$$dS_s = S_s\left(\mu ds + \sigma_s dW_s\right) \quad (s\geq t) \quad (12)$$

と定義する．ただしここで，(8) と異なり，$\sigma = \{\sigma_s\}_{s\in[t,T]}$ は

$$\underline{\sigma} \leq \sigma_s \leq \overline{\sigma}, \quad \forall s\in[t,T] \quad (13)$$

($\underline{\sigma},\overline{\sigma}$ は非負定数）を満たす確率過程であるとする．これは，微小時間 ds を用いて

$$\sigma_s = \text{“株価変化率 } \frac{dS_s}{S_s} \text{ の条件付標準偏差”} \times \frac{1}{\sqrt{ds}}$$

と解釈され，(時刻 s での) ボラティリティ (volatility) と呼ばれる．

さて，デリバティブ*15)とは，例えば，購入者があらかじめ決められた満期日 T に株価 S_T に依った額 $f(S_T)$ 受け取れるような金融商品のことである．非負値をとる関数 $f:(0,\infty)\to[0,\infty)$ の例としては $f(x)=(x-K)^{+}$*16)（K は正定数，この場合コールオプションと呼ばれる）や，$f(x)=(L-x)^+$（L は正定数，この場合プットオプションと呼ばれる）や，それらの組合せ $f(x)=a(x-K)^+ + b(L-x)^+$ (a,b は定数) が典型的である．

最初に，ボラティリティが定数である，すなわち

$$\sigma_0 = \underline{\sigma} = \overline{\sigma} \ (>0) \quad (14)$$

と置いてみよう．このとき，デリバティブの，時刻 $t(<T)$ での“適正”*17)な理論価格を決定することを行ったのが所謂 Black–Scholes–Merton 理論[1, 10]であり，これは1970年代のファイナンス理論における一つの金字塔的成果である．本節の解説に必要な部分を結果のみ述べる．

定理 4 (Black–Scholes–Merton) (14) を仮定する．(12) で期待収益率 μ を金利 r に等しく置き

$$C(t,x) = E\left[\mathrm{e}^{-r(T-t)}f(S_T) \,\middle|\, S_t = x\right]$$

と定義する．このとき，$C(t,S_t)$ が満期 T での受取額が $f(S_T)$ のデリバティブの時刻 t における唯一の適正価格である．また，関数 C は2階線形偏微分方程式

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \mathcal{L}^{\sigma_0}C - rC = 0, \quad C(T,x) = f(x),$$

ただし

$$\mathcal{L}^{\sigma_0}C = \frac{1}{2}\sigma_0^2 x^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + rx\frac{\partial C}{\partial x},$$

の滑らかな解である．

*13) これらの一部は例えば文献 4) 第 10 章に紹介されている．
*14) 文献 5, 7, 11) などの確率解析の教科書を参照．
*15) derivative security: 金融派生証券の略．
*16) $(x)^+ = \max(x,0)$.
*17) “適正” の意味をはっきりさせないといけないが，説明は割愛する．例えば数理ファイナンスの教科書[6, 14]や，文献 11) などを参照．

ところで，上記の結果を用いてデリバティブの適正理論価格の計算を行う際は，σ_0 の値を何らかのやり方で推定・決定しないといけないが[*18)]，実際に，株価過程の時系列を用いた統計的分析や市場で売買されているデリバティブの価格分析を行うと，仮定(14)は強すぎるという結論がしばしば導かれる．また，このようなパラメータ推定には推定誤差が常に伴うものである．そこで本節では，(14)を緩めて，ボラティリティは(13)の範囲を動く未知・不確定な過程であると仮定し，デリバティブの適正理論価格の上下限を計算することを考える．

言い換えれば，(13)を満たすボラティリティ過程の全体を $\Sigma_{t,T}$ と記して，確率制御問題

$$V(t,x)=\sup_{\sigma\in\Sigma_{t,T}} E\left[\mathrm{e}^{-r(T-t)}f(S_T)\middle| S_t=x\right] \quad (15)$$

を取り扱うわけである[*19)*20)]．2節の議論に従えば，(15)の満たすべきHJB方程式が

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\sup_{\underline{\sigma}\le\sigma\le\overline{\sigma}}\mathcal{L}^{\sigma}V-rV=0, \quad (16)$$

方程式内のsupを計算すれば

$$\frac{\partial V}{\partial t}+rx\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{x^2}{2}G\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2};\underline{\sigma},\overline{\sigma}\right)-rV=0 \quad (17)$$

と書かれる．ただし，記法

$$G(x;\underline{\sigma},\overline{\sigma})=\overline{\sigma}^2(x)^+-\underline{\sigma}^2(x)^- \quad (18)$$

を用いている[*21)]．そして，3章で解説されているように，(15)の値関数 V がHJB方程式(17)–(18)の粘性(一意)解として特徴付けられるわけである．

実はこの場合も，$\underline{\sigma}>0$ のときは，HJB方程式(17)–(18)は滑らかな解を持つことが知られているのだが[7)]，一方，$\underline{\sigma}=0$ のとき，滑らかでない解が出現することが知られている[15)]．

同種のHJB方程式は，ボラティリティの不確定性を考慮した動的なリスク計測・制御に関する最新の研究の中でも導出・活用されており[13,16)]，興味深く思われる．

*18) 金利 r の値や関数 f の形は通常所与である．

*19) 価格の下限を求める問題を考える際は，(15)で f を $-f$ に置き換えればよいので省略する．

*20) この問題の解析は，デリバティブの適正価格の上限を与えるのみならず，デリバティブの売却者が“最悪のボラティリティ過程シナリオ”に基づいてリスクを制御する際にも重要な役割を果たす．文献15)での解説や，そこで挙げられている参考文献を参照されたい．

*21) $(x)^-=\max(-x,0)$.

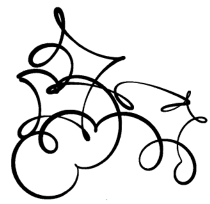
参考文献

1) Black, F. and M. Scholes: The pricing of options and corporate liabilities, *J. Political Economy*, **81**, 637–659 (1973).
2) Crandall, M.G., H. Ishii and P.-L. Lions: User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **27**, 1–67 (1992).
3) Crandall, M.G. and P.-L. Lions: Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **277**, 1–42 (1983).
4) Fleming, W.H. and H.M. Soner: *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*, 2nd ed., Springer–Verlag, New York (2006).
5) Karatzas, I. and S. Shreve: *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, 2nd ed., Springer–Verlag, New York (1991).
6) Karatzas, I. and S. Shreve: *Methods of Mathematical Finance*, Springer–Verlag, Berlin (1998).
7) Krylov, N.V.: *Controlled Diffusion Processes*, Springer–Verlag, Berlin (1980).
8) 松本裕行：『応用のための確率論・確率過程』，数理科学 SGC ライブラリ **36**，サイエンス社 (2004).
9) Merton, R.C.: Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model. *J. Economic Theory*, **3**, 373–413 (1971).
10) Merton, R.C.: Theory of rational option pricing. *Bell J. Econ. Manag. Sci.*, **4**, 141–183 (1973).
11) 長井英生：『確率微分方程式』，共立出版 (1999).
12) 西尾眞喜子, 樋口保成：『確率過程入門』, 培風館 (2006).
13) Peng, S.: G-Brownian motion and dynamic risk measure under volatility uncertainty. preprint, arXiv:0711.2834v1 [math.PR], (downloadable from http://www.arxiv.org/) (2007).
14) 関根　順：『数理ファイナンス』，培風館 (2007).
15) Touzi, N.: "Stochastic control problems, viscosity solutions, and application to finance", Lecture note, Scuola Normale Superiore, Pisa. Special Research Semester on Financial Mathematics, (downloadable from http://www.cmap.polytechnique.fr/~touzi/) (2002).
16) Umezawa, Y.: A limit theorem on maximum value of hedging with a homogeneous filtered value measure, preprint, UTMS 2006–14, University of Tokyo (2006).

(かいせ・ひでひろ，名古屋大学大学院情報科学研究科)
(せきね・じゅん，京都大学経済研究所)

有限要素法

有限と無限を結ぶ数値解析学



菊 地　文 雄

1. はじめに

有限要素法は，理工学や産業界に現れる各種の偏微分方程式を解くための実用的で数理的にも優れた数値解析手法である．その概要は，解析対象の領域を単体等の単純な形状の小領域（有限要素，要素）に分割した上で（図 1），方程式の解を分割に即した区分的な多項式等で近似し，さらに各種の変分法的定式化（弱定式化）に基づいて離散化方程式（近似方程式）を作成し，それを線形計算などの数値計算法を駆使したコンピュータ・プログラムにより解き，得られた近似解を整理した上で種々の目的に活用する，というものである．基本となる三角形 1 次要素は，数学分野では Courant により 1943 年に提出されたが，実用化したのは，約 10 年後に工学分野で平面応力解析用の要素として提出されたのが契機であり，以後，有限要素法はコンピュータとソフトウェア技術の進歩を背景として，固体構造物の応力・変形解析を初め，様々な分野で急速に発展・普及した[1~3]．

有限要素法は，多様な形状の領域を扱える実用的な数値計算法だが，同時に数学的な内容が豊富であり，例えば関数解析，偏微分方程式論など，本質的に無限と極限を扱う解析学と密接に結びついて発展してきた．数値計算自体は事実上有限回の手順で完結するものでないと利用しがたいが，有限要素法では常に無限を意識しながら，より良い計算法の開発を目指してきた．したがって，有限

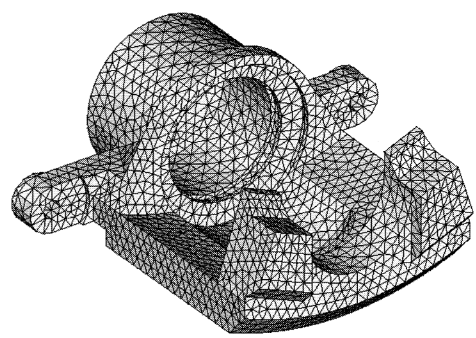


図 1　有限要素分割の例（自動車のブレーキキャリパー）．

要素法に関連する数学，すなわち数値解析学は，有限と無限を結ぶ解析学としての性格を持つ．本稿では，その一端を概説したい．

2. 弱定式化と基本的有限要素法[1~5]

Ω を n 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$（n は正の整数）内の有界領域，$\partial\Omega$ をその境界とする．Ω の境界には，ある程度の連続性やなめらかさが要求されるが，ここでは多角形や多面体のように多少の角などがある領域も状況により許容される．Ω 上の既知関数 f を与えたとき，次のポアソン方程式の境界値問題を具体的モデルとして取り上げる．

$$-\Delta u = f \ (\Omega \text{ 内}), \quad u = 0 \ (\partial\Omega \text{上}). \quad (1)$$

ここで，u は解，Δ はラプラシアンを表す．

有限要素法では，微分方程式（上記の第 1 式）

と境界条件（第2式）による問題の定式化よりも，弱定式化という，一種の積分形に基づく定式化が利用されている．まず，Ω で定義され $\partial\Omega$ 上で $v=0$ を満たす任意の関数 v（重み関数とか試験関数と呼ばれる）を，微分方程式にかけて積分する．

$$-\int_\Omega (\Delta u) v\,dx = \int_\Omega fv\,dx\,. \qquad (2)$$

ただし，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ は変数であり，積分は2次元以上では n 重積分を表している．上式の左辺にグリーンの公式（1次元の部分積分の公式の拡張）を適用し，$\partial\Omega$ 上の積分と，u に関する微分階数を1つ減らした（v に関する階数は増える）Ω での積分の和に変形する．ここで，$\partial\Omega$ 上で $v=0$ に注意すると，$\partial\Omega$ 上の積分は消え，次の形の式（弱形式と呼ばれる）を得る．

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx = \int_\Omega fv\,dx\,. \qquad (3)$$

この式は，考えている任意の v に対し成立する．逆に，関数 u がすべての v に対しこの式を満たすときは，若干の条件の下で，(1) 中の微分方程式を満たすことも示すことができる．したがって，元の問題 (1) を，上記の弱形式と (1) 中の境界条件を満たす u を求める問題に変換できる．このような定式化を弱定式化と呼んでいる．

弱定式化は，元の (1) よりやや間接的だという欠点はあるが，現れる関数に対する微分可能性や境界条件等の要件が弱められ，より広い範囲の現象の記述を可能にすること，数学的取扱いも場合により便利である等の利点がある．有限要素法は，少なくとも結果的にはこのような利点を十分に享受している．なお，(3) と (1) の対応の詳細等については，文献1～5) を参照されたい．

上記では，問題で扱う関数に対する条件を正確には述べていない．より厳密に扱うため，少し数学的準備をしよう．まず，Ω 上で可測で2乗可積分な実関数全体のなすヒルベルト空間を $L^2(\Omega)$ とし，その内積を次のように記しておく．

$$(u,v) := \int_\Omega u\,v\,dx \quad (u,v \in L^2(\Omega))\,. \qquad (4)$$

これを用いると，f と v がともに $L^2(\Omega)$ に属すならば，(3) の右辺は (f,v) と表せる．

次に，関数自体と1階導関数がすべて $L^2(\Omega)$ に属し，$\partial\Omega$ 上で値が0になる実関数のなす集合 $H_0^1(\Omega)$ (=: V とおく．V もヒルベルト空間になる) を用い，(3) の左辺に相当する次の量を定義する．

$$a(u,v) := \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i}\right), \quad (u,v \in V). \qquad (5)$$

このとき，先の弱定式化は，前記の f が $L^2(\Omega)$ に属すとして，次のように述べられる：V の元 u として，次式（弱形式）を満たすものを求めよ．

$$a(u,v) = (f,v), \quad (\forall v \in V \text{ に対し}). \qquad (6)$$

本問題の解 u の V における存在と一意性は，$a(\cdot,\cdot)$ に関する諸性質を確認した上で，ヒルベルト空間の基本的な諸定理を用いて示すことができる[2,4,5]．

次に本問題に対する有限要素の例として，もっとも基本的な単体1次有限要素法を概説する．簡単のため，Ω は有界な多面体領域とし，その単体分割を与える．具体的には，$n=1,2,3$ の順に，区間，三角形，四面体による分割である．分割は重なりやすき間がなく，さらに隣り合う単体間では共通部分がどちらにとっても1つの側面全体になるように作る．したがって，例えば単体の頂点が別の単体の側面の内部にくることは避ける．分割内の単体を有限要素，または要素と呼び，分割内の頂点 $x^{(i)}$ を節点と呼び習わす（i は番号）．

本問題に対する単体1次有限要素法では，u に対する近似関数の空間 V^h を次のように定める．

$$V^h = \{v \in V; v \text{ は各単体内では1次多項式}\}. \qquad (7)$$

このような近似関数は，各有限要素内では1次多項式だが，Ω 全体では単一の多項式とは限らない．さらに，$v \in V^h$ は $\Omega \cup \partial\Omega$ 上で連続で $\partial\Omega$ 上では0であり，V^h は V の有限次元部分空間になる．V^h の基底としては，$\phi_i(x^{(j)}) = \delta_{ij}$（$\delta_{ij}$ はクロネッカーのデルタ，i,j は内点節点全体にわたる）で定まる節点基底 $\{\phi_i\}$ が標準的である．

その上で，解 u に対する有限要素近似解 $u_h \in V^h$ を，(6) に基づく次の条件で定める．

$$a(u_h, v) = (f, v), \quad (\forall v \in V^h \text{に対し}). \quad (8)$$

この問題の解の存在と一意性は，例えば元の問題に対する議論の特別な場合として示すことができる．

実際の計算では，前記の節点基底を用い，係数行列は $a(\phi_j, \phi_i)$ を (i, j) 成分とする正方行列 K（次数は $m = \dim V^h$ で対称），右辺を (f, ϕ_i) が第 i 成分である m 次元列ベクトル $\boldsymbol{F}$ とする連立1次方程式 $K\boldsymbol{U} = \boldsymbol{F}$ を解けばよい．$\boldsymbol{U}$ は u_h の節点値のベクトルである．K や $\boldsymbol{F}$ は要素に分けて計算し，和をとって作成する．領域の要素分割や各種の計算は，コンピュータを利用して自動的になされ，実際，多くの商用の汎用プログラムが（特に固体構造物に対しては）開発，活用されている．

要素形状としては四辺形や六面体等も用いられ，高次多項式も近似に利用される．また，$a(\cdot, \cdot)$ や (f, v) を再設定すれば，様々な問題に対する有限要素法が構成できる．さらに，非線形問題や時間依存問題にも有限要素法は盛んに適用されている．

以下，数理的解析の成果の一端として，有限要素法の誤差に関する性質を述べておく．そのために，$a(\cdot, \cdot)$ に付随する次のノルムを定義する．

$$\|v\|_E = a(v, v)^{1/2}, \quad (v \in V \text{ に対し}). \quad (9)$$

すると，$v_h \in V^h$ に対して次の不等式を導ける．

$$\|u - u_h\|_E \leq \|u - v_h\|_E. \quad (10)$$

この式で，v_h の V^h における任意性に注意すると，$\|\cdot\|_E$ を誤差の大きさの尺度として用いたとき，誤差は v_h が有限要素近似解 u_h に一致したときに最小になること（一種の最良近似の性質）がわかる．これは，有限要素法の重要な基本的性質である．

前記で2次元問題の場合に三角形1次要素を用いるとき，領域が凸多角形で要素分割に若干の条件を付ければ，h を全要素の最大辺長，$\|\cdot\|$ を $L^2(\Omega)$ のノルムとし，C を f や h に依らぬ正定数として，次の誤差評価式が導ける．

$$\|u - u_h\|_E \leq Ch\|f\|, \quad \|u - u_h\| \leq C^2h^2\|f\|. \quad (11)$$

特に，h が0に近づくときの収束も結論できる．

このような評価は，前記の最良近似の性質や，u を各要素で1次多項式によって補間したときの誤差評価などを組み合わせて得られる．上式の右辺には近似解 u_h 自体は現れないので，u_h を計算しない段階でも利用できる．この種の誤差評価は事前誤差評価と呼ばれている．上記の正定数 C の具体的値は求めにくかったが，現在では良好な上界が得られ，誤差の大きさを具体的な数値として見積もれるので，後述の適応型計算や精度保証付き数値計算等に活用されている．

このような具体的誤差評価が広範囲に利用可能なことも有限要素法の特色の一つで，歴史的に先行する差分法などでは，誤差解析が難しい場合が多いのと比較して対照的である．その理由の一つは，有限要素法が弱定式化を利用した上で，そこに現れる関数空間の部分空間を原則として使用することにある．還元すれば，数学的な定式化にできるだけ沿う形で近似方程式を作成する結果，元の問題で成立する性質のかなりの部分を近似解が受け継ぐことが可能になることである．

3. 混合型有限要素法[2,4,5]

先の問題で $p := \operatorname{grad} u$ とおくと，$-\Delta u = f$ は $\operatorname{div} p + f = 0$ と表される．これは全体としては u と p に対する次の連立偏微分方程式となる．

$$p - \operatorname{grad} u = 0, \quad \operatorname{div} p + f = 0. \quad (12)$$

この連立偏微分方程式は，用いる関数空間と弱形式を適切に設定すれば，やはり弱定式化を与えることができ，さらに有限要素法の適用も可能になる．ただし，この例では未知関数が u と p の2種類に増えるため，前節の弱定式化と比較して有利とは限らぬが，複雑な問題では，このような取扱

いのほうが有利で自然な場合も少なくない．

例えば非圧縮性粘性流体の問題では，(12) の第 2 式に似た非圧縮条件式を含む連立偏微分方程式が現れるが，そのような問題では，本節で述べた複数の未知関数を含む定式化のほうが自然で，ベクトルポテンシャルを導入して非圧縮条件式を消去する定式化などのほうが不便なことも多い．

このような手法は，多変数関数の微積分での Lagrange の未定乗数法を，関数空間や偏微分方程式へ拡張したものとして通常は位置付けられている．また，それに基づく有限要素法は混合型有限要素法（混合法）と呼ばれ，その理論と実践は有限要素法で重要な位置を占めている．ただし，前節のような本質的に一種類の未知関数を用いる定式化とは異なり，混合法では近似解の関数形の設定には微妙な配慮が必要で，特に u と p の近似関数の相互間の関係，例えば各有限要素内での近似多項式の次数や節点の配置などを上手に組み合わせないと，数値的格子振動や近似解が極端に過小になるなど実際の解とは全く異なる結果が生じる場合がある．その一端は文献 2〜5) に与えられている．現在では，下限・上限条件などの混合法の理論の進歩や数値実験の蓄積など，多くの成果が得られている．さらに，安定化技法など，近似関数形の選び方がより柔軟な手法も開発されている．

4. 様々な応用分野と最近の話題[1〜3)]

有限要素法は，微分方程式全般に適用可能な汎用的数値解法だが，最初に成功したのが固体力学（構造解析）分野だったこともあり，航空機，船舶，自動車，土木建築構造物などの設計解析には必須の手法となっている．微小変形線形弾性論の範囲では，固体力学の支配方程式は Navier の方程式で与えられ，それに対しては前述の単体 1 次要素を初めとする 2 次元，3 次元の要素が有効である．さらに，固体構造物の幾何形状に応じ，はり，板，シェル等の数理モデルが知られており，これらに対する有限要素法も開発，利用されている．

有限要素法の適用領域は，固体力学以外にも，流体力学，伝熱問題，化学反応問題，さらにファイナンス等様々な分野に広がっている．最近では，電磁場問題への応用等で近似関数の構成法に顕著な発展が見られた．その際，個々の分野の特徴に応じ，定式化や数理解析に新しい視点と技法が要求されることが少なくない．

最近の話題として，解の状況に応じて要素分割（メッシュ）を変更させながら解析を進める適応型計算法で必要となる，得られた数値解をも利用して誤差の大きさを見積もる事後誤差評価手法，さらに数値解の情報から元の問題の厳密解の存在や一意性等も示す精度保証付き計算法[6)]をまず挙げておく．前者は計算の自動化の点で実用的意味が大きく，すでに実用化もかなり進んでおり，後者は数学上の証明手段としても数値計算が利用できる可能性を拓くものとして期待されている．

後者では，数値解析での定量的な誤差評価と解析学での不動点定理，さらに区間解析などに基づく数値解の計算機誤差評価などを組み合わせることにより，微分方程式の解の存在（あるいは非存在）を証明することも可能になってきている．そのためには，計算機上での数値誤差を厳密に評価するための理論やアルゴリズムに加え，それを計算機上で実現するソフトウェアの開発や検証が不可欠で，この種の手法の十分な認知には，今しばらく実績の積み重ねと時間を要するかもしれないが，いずれ大きな役割を果たすと期待している．

さらに，有限要素法の拡張として，要素分割をできるだけ排除するメッシュレス（メッシュフリー）法，要素間の関数の連続性を要求しない不連続有限要素法等の研究が進んでいる[7,8)]．これらは，従来型有限要素法でも扱える問題では有利とは限らぬが，従来型手法では扱いが困難な問題には，新しい可能性を拓くと期待されている．また，このような進歩は，有限要素法の関連競合手法である有限差分法や有限体積法等の発展にも寄与している．

5. 適応型計算の例

最後に，適応型計算の例を示しておく．一般に

有限要素法の適用では，要素分割が大きな問題になる．すなわち，境界形状を十分良く近似した上で，領域内での解の変動を良好に近似できる程度に，分割は細かくする必要があるが，細かすぎれば計算量が過大でしかも無駄になりかねないので，解に応じた分割が望ましい．しかし一般に解は未知なので，最初から適切な分割をすることは，相当の経験があっても困難である．

適応型計算では，まず試みの分割をした上で数値解を求め，数値解の情報をも利用しながら数値解の誤差や解の状況を推定し，より良い分割を得ることを繰り返す．したがって，事後誤差評価とは密接に関連するし，事前誤差解析の技法も活用する．その際，数値解の誤差の大きさを示す指標が必要で，その値に応じて分割を細かくしたり粗くして計算を反復し，指標の大きさが設定閾値以下になれば反復を停止し（とりあえずの）最終的数値解とする．指標には経験的なものも数学的に厳密なものもあり，複数の指標の組合せもなされる．また要素分割の改善だけでなく，多項式の次数を上げるなど近似関数の改善も利用される．

図 2 には，中央にクラック（スリット，亀裂）のある薄い弾性長方形平板を，左右に引っ張ったときの応力を計算する問題を示す．図中の寸法は，計算例では $a = 2$, $b = 10$, $c = 3$ とした．この問題は，いわゆる平面応力問題の一つで，2 変数，2 関数の連立線形偏微分方程式の境界値問題として定式化され，有限要素法では，2 節同様，弱定式化を利用している．また，クラックの解析は，固体構造物の破壊に関連する重要な課題である．

図 3 は，問題の左右上下の対称性を利用して右上の $\frac{1}{4}$ 領域を取り上げ，そこを四辺形双 1 次有限要素[1)]で初期要素分割したものである．最初は全要素が長方形形状で，要素寸法も大きく変化してはいない．境界条件としては，全体の上下辺とクラック面上では表面力が 0 とし，左右辺では一様な横方向引っ張り力を与えている．また，実際に計算する $\frac{1}{4}$ 領域での対称線に相当する辺上で，クラック表面以外の部分では，対称条件（法線方向変位と接線方向表面力が 0）を課す．なお，有限要素法では直接には法線方向変位を 0 に指定すれば十分で，表面力が 0 という境界条件は，自然境界条件として自動的に処理できる[1)]．

図 4 には，分割の節点は移動させるが分割の細分や間引きはしない手法（r 法）で，適当な指標を用い何回か反復した後の分割図を示す．また，最初の長方形分割自体は変えず，誤差が大きいと推定される所は長方形を細分する（小さいところでは間引きもする）手法（h 法）も試験した．

図 5 には，左右対称軸上での横（x）方向垂直応力の計算結果を，図 3 の初期分割についてと，r 法と h 法で指標の大きさが設定値以下になった状態に対して示す．図では，xy 座標系の原点は長方形の中心にとり，グラフの横軸はクラック先端 $y = 2$ から平板最上辺 $y = 5$ の範囲としている．

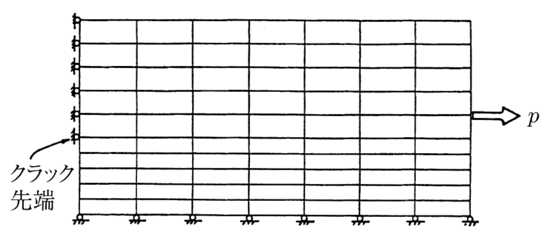


図 3　出発時の有限要素分割.

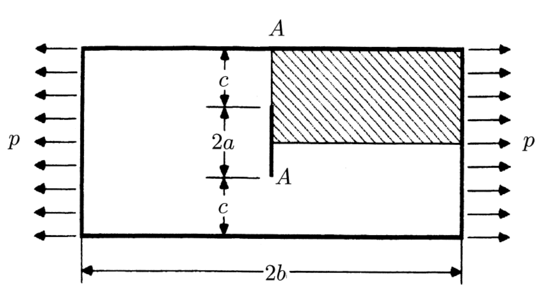


図 2　中心にクラックを有する長方形平板.

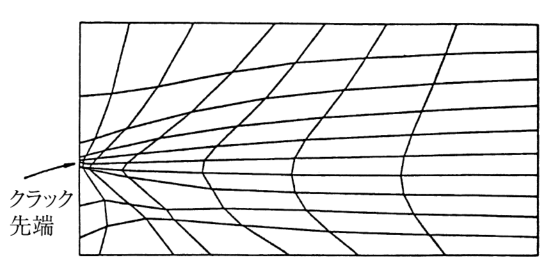


図 4　適応計算終了時の有限要素分割.

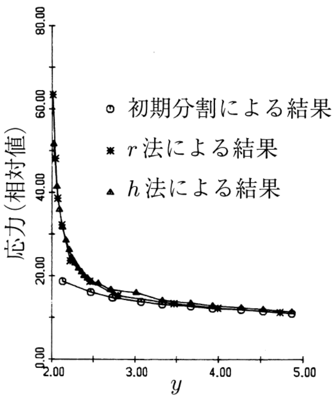


図5　x 軸方向垂直応力の y 軸方向分布の比較.

示した応力値は，理論的にはクラック先端に近づくと無限大に発散することが知られているが，数値計算では，とりあえず大体の様子を知ることを目指している．初期分割では，先端でも応力値は小さく，満足な結果ではない．h 法では，主に細分に頼るので，通常は要素数や節点数はかなり大になり，計算量も最初の分割よりも大きくなる．一方，r 法では節点を移動するだけだが，解の変化が大きい部分では要素を小さくせざるを得ず，図4に示すようにクラック先端部分には要素が集まってくる．他方，変化が少ない部分は要素寸法が大きく，要素はまばらになる．全体としての未知数や要素数は初期分割と同じなので，計算量の増加はない反面，精度を限りなく向上させるのは無理だが，ここで示した範囲では精度が良いと思われる h 法に近い結果が得られている．

このように，数学的なアイデアが実際の有限要素計算の自動化に活用できるのは，ある程度まで定量的な誤差評価が可能なことが一因と思われる．

6. 結び

有限要素法について，概要と若干のトピックを紹介してきた．現状を見ると，3次元解析や非線形解析など大量の計算資源を要する計算がかなり実用化され，その結果，大規模計算に大きな関心が集中しているように思われる．一方で，その基礎付けが不十分だと，一見微小な傷が思わぬ大きな失敗をもたらすことも，計算規模が大きい以上は当然であり，国際的には目立たぬ地味な研究開発が続けられている．その基礎として，数学が大きな位置を占めることは明らかであり，有限要素法は数学と産業を結びつける極めて重要で興味深い分野であることを強調したい．

最後に，本稿の分割図や数値例は，(株) くいんとの石井惠三氏によるものであり，謝意を表したい．

参考文献

1) 菊地文雄：『有限要素法概論［新訂版］』，サイエンス社，1999.
2) 菊地文雄：『有限要素法の数理』，培風館，1994.
3) O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, J.Z. Zhu: *The Finite Element Method*: Its Basis and Fundamentals, Sixth ed., Elsevier, 2005.
4) 田端正久：『微分方程式の数値解法II』，岩波書店，1994.
5) H. Fujita, N. Saito, T. Suzuki: *Operator Theory and Numerical Methods*, North–Holland, 2001.
6) 中尾充宏，山本野人：『精度保証付き数値計算』，日本評論社，1998.
7) I. Babuška, U. Banerjee, J.E. Osborn: Survey of meshless and generalized finite element methods: A unified approach, *Acta Numerica*, **12** (2003) 1–125.
8) D.N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn, L.D. Marini: Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems, *SIAM J. Numer. Anal.*, **39** (2002) 1749–1779.

（きくち・ふみお，東京大学大学院数理科学研究科）

画像処理と曲率流方程式



石井　克幸

1. 画像処理

最近，コンピュータの性能向上やその価格低下のおかげで写真やビデオ画像の編集・加工がパソコンを使って自宅で容易にできるようになった．それに伴い，**画像処理**という言葉も日常的に使われるようになってきた．一般に，画像処理とは，画像として表された情報を，それが明確になるように操作・解析することを意味する．特に，コンピュータを用いた**ディジタル画像処理**のことを単に画像処理と呼ぶことが多い*1)．

ディジタル画像処理技術は，1920 年代に始まったと言われている．しかし，画像処理という考えが広く用いられ始めたのは，半導体集積回路（IC）を導入した第 3 世代コンピュータが現れた 1960 年代以降である．1960 年代初期に米国航空宇宙局（NASA）ではディジタル画像処理による月面写真の処理で顕著な成果を収めた．これが引き金となってディジタル画像処理技術の開発・研究が盛んになり，現在に至っている．また，それらの技術は先に挙げた写真やビデオ画像の編集・加工以外にも，CT, MRI 等を用いた医療診断，工業製品の品質検査，銀行 ATM の生体認証等，広範な分野に応用されている．

画像処理と一口に言っても，その範囲は非常に広い．その中で与えられた画像から対象となる領域を抽出することは重要なテーマである．その一つとして対象物の輪郭抽出（**エッジ抽出**と呼ばれる）がある．その方法は様々であるが，近年，曲率流方程式を利用したエッジ抽出法の研究・開発も進められている．本稿では，エッジ抽出について簡単に述べた後，曲率や曲率流方程式に関する事項を交えながら，モノクロ画像におけるエッジ抽出において曲率流方程式がどのように使われているのかを見ていくことにしよう．

2. エッジ抽出

対象物の輪郭，または境界のことを**エッジ**と言う．一般に画像の濃淡はエッジで急激に変化しており，これは対象物の何らかの特徴を反映していると考えられる．エッジを抽出する方法は色々あるが，その中で **snakes** を基にした**動的輪郭モデル**と呼ばれるものがよく知られている．これは濃淡，エッジ，または各データ固有の領域・境界らしさ等の画像情報の一致度と対象物の形状等についての情報を基にした評価式を作り，それを最小化する問題を解くことによって，最適な輪郭を得るというものである．snakes の詳細については文献 13, 14) 等を参照されたい．

snakes はエッジ抽出に有効な方法の一つであり，様々な改良・拡張が研究されている．しかし，実際に用いる際には初期形状や変形のしやすさを表すパラメータの設定が難しい場合が多いという

*1)　実際，情報科学の分野では画像処理とはディジタル画像処理を指すようだ．

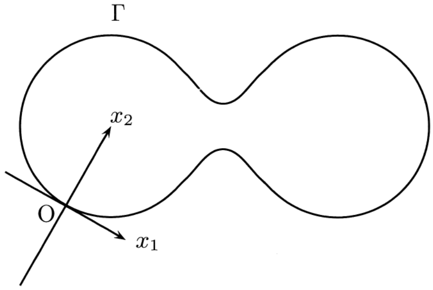


図 1　座標軸の取り方.

問題がある.

このような問題点を克服するアプローチとして，エッジをその曲率と周囲の画像データに基づいた方程式を立て，それを解くことによってエッジを望ましい状態に変形させるという方法が用いられ始めている．この方法には

(i)　snakes のように画像データに基づくパラメータをあまり必要としない.

(ii)　等高面の方法*2) を用いると，対象物が複数個あっても，個数に関係なくそれらのエッジが同時に抽出できる.

等の大きな利点がある.

上で述べた方法の一例を説明する前に平面曲線に対する曲率，曲率流，および曲率流に対する等高面の方法について説明しよう.

3. 平面曲線の曲率

曲率とは曲線の曲がり具合を表す量のことである．直感的には，きつく曲がっている曲線は曲率が大きく，緩やかなところは曲率が小さい．直線は曲率 0 である．これを念頭において，平面曲線に対する曲率を以下のように直感的に導入しよう.

Γ を平面における滑らかな単純閉曲線*3) とする．Γ 上の点を任意に取り，それを原点 O としよう．O を中心とする直交座標系を，O における Γ の接線方向に x_1 軸を，「Γ で囲まれる領域のほうを正の向き」となるように x_2 軸を取る（図 1 参照）．すると Γ は滑らかなので，滑らかな関数*4) f が存在して O の近くでは Γ を $x_2 = f(x_1)$ のグラフとして表すことができる．座標軸の選び方から $f(0) = f'(0) = 0$ なので，O の近くの Γ はテイラー展開を使うと

$$x_2 = \frac{1}{2}f''(0)x_1^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(0)x_1^3 + \cdots$$

と表せる．$|x_1|$ が十分小さいときは $f''(0)x_1^2/2$ に比べて $f^{(3)}(0)x_1^3/3! + \cdots$ は無視できるほど小さいので，O の近くの Γ は 2 次関数 $x_2 = ax_1^2/2$ $(a = f''(0))$ のグラフで近似できる．よって，Γ の局所的な形は 2 次関数のグラフに近いと言える.

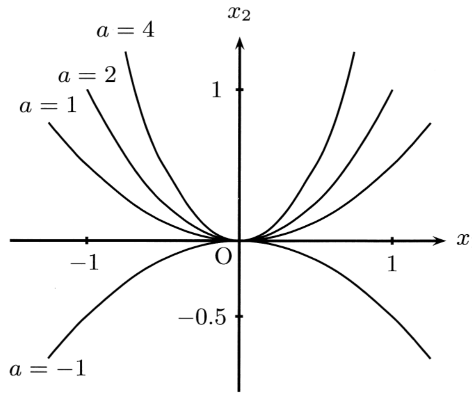


図 2　$x_2 = ax_1^2/2$ のグラフ.

ところで，2 次関数 $x_2 = ax_1^2/2$ のグラフを描くと a の値に応じて，原点でのグラフの曲がり方がきつくなったり，ゆるくなったり，また，凸になったり，凹になったりすることは図 2 を見てもわかる．よって a が原点における曲線の曲がり具合を表す量であることは容易に想像できる．この a の値（即ち $f''(0)$ の値）を O における**内向き法線方向に関する Γ の曲率***5) と言う.

*2)　レベルセット法とも呼ばれる.

*3)　単純閉曲線とは自分自身と交差していない閉じた曲線のこと．本稿で，滑らかな単純閉曲線とは局所的には何回でも微分可能な関数のグラフで描ける単純閉曲線を指すことにする.

*4)　本稿では，何回でも（偏）微分可能な関数を滑らかな関数と呼ぶことにする.

*5)　「内向き法線方向に関する」とは直交座標系を導入する際，x_2 軸を「Γ で囲まれる領域のほうを正の向き」となるように選んだことによる．x_2 軸を Γ で囲まれていない領域のほうを正の向きとするように取ったとき，上で得られた a を O における**外向き法線方向に関する Γ の曲率**と言う.

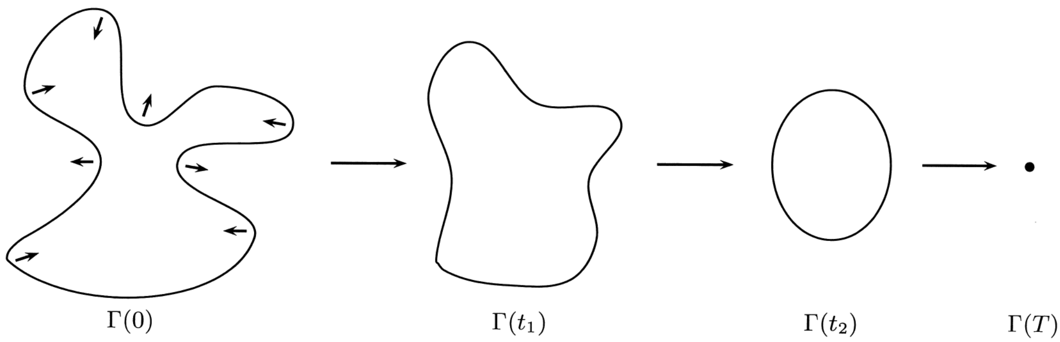


図 3　曲率流の例．$0 < t_1 < t_2 < T$ で T は $\Gamma(t)$ が 1 点に収縮する時刻とする．矢印はそれぞれの部分が動く方向を表す．

例 1　x_1x_2-平面において中心 $(0, r)$，半径 r の円周を Γ とする．原点の近くの Γ は $x_2 = r - \sqrt{r^2 - x_1^2}$ で表されるので，上と同様の考察をすると Γ の曲率は $1/r$ であることがわかる．

例 2　$f(x_1)$ を滑らかな関数とし，Γ を x_1x_2-平面における曲線 $x_2 = f(x_1)$ とする．Γ 上の任意の点 $(x_1, f(x_1))$ の曲率は $f''(x_1)/(1 + f'(x_1))^{3/2}$ である．これは文献 12, 16) 等を参照されたい．

4. 単純閉曲線に対する曲率流

$\{\Gamma(t)\}_{t \geq 0}$ を平面における滑らかな単純閉曲線の集合とする．$\{\Gamma(t)\}_{t \geq 0}$ が**曲率流**であるとは，$\Gamma(t)$ の運動方程式が次のように与えられるときを言う．

$$V(t, x) = \kappa(t, x), \quad t > 0, \quad x \in \Gamma(t). \quad (1)$$

ここで $V(t, x)$ は $x \in \Gamma(t)$ における内向き法線方向速度，$\kappa(t, x)$ は $x \in \Gamma(t)$ における内向き法線方向に関する曲率である．この方程式は**曲率流方程式**と呼ばれている．

まず特別な場合を考えよう．

例 3　$\Gamma(0)$ を半径 1 の円周とし，これを初期曲線とする曲率流 $\{\Gamma(t)\}_{t \geq 0}$ を考える．例 1 より $\Gamma(0)$ の曲率は 1 なので，$\Gamma(t)$ も円周であると考えられる．また方程式 (1) より $\Gamma(t)$ の半径は小さくなることがわかる．従って $\Gamma(t)$ の半径がわかれば，その運動の様子がわかったことになる．時刻 t における $\Gamma(t)$ の半径を $R(t)$ とおく．$\Gamma(t)$ の内向き法線方向に関する速度，曲率はそれぞれ $-dR/dt$, $1/R$ なので，方程式 (1) は

$$-\frac{dR}{dt} = \frac{1}{R}, \quad t > 0$$

となる．これを $R(0) = 1$ という条件の下で解くと $R(t) = \sqrt{1 - 2t}$ を得る．よって $\Gamma(t)$ は半径 $\sqrt{1 - 2t}$ の円周であり，$t = 1/2$ には 1 点に収縮してしまうことがわかる．

一般の滑らかな単純閉曲線に対する曲率流の場合，それがどのように動くのか直感的に説明しよう．図 3 にある $\Gamma(0)$ のように凹凸の多い単純閉曲線が曲率によって動くとき，内向き単位法線ベクトルに関して凸の部分は $\kappa(0, x) > 0$ なので引っ込むように，凹の部分は $\kappa(0, x) < 0$ なので出て行くように動くことで凹凸が徐々にならされていく．その後，$\Gamma(t)$ は楕円，もしくは円のような凸曲線になるが，このとき $\Gamma(t)$ のどの点でも $\kappa(t, x) > 0$ なので，例 3 から 1 点に収縮することが推測される．これは文献 7, 10) により，数学的に正しいことが証明されている．

5. 等高面の方法

2 節で少し触れた，**等高面の方法**とは，曲線（または曲面）の集合をある関数 $u = u(t, x)$ の 0–等高線（または 0–等高面）$\{x \mid u(t, x) = 0\}$ とみなし，曲線や曲面の運動方程式を u の方程式に書き換え，それを解くことで曲線や曲面の集合を求

める，という方法である．本節では曲率流方程式 (1) に対する等高面方程式を導いてみよう．

$\{\Gamma(t)\}_{t\geq 0}$ を滑らかな単純閉曲線からなる曲率流とする．関数 u を滑らか，かつ

$$u(t,x)\begin{cases} >0 & (x\in\Gamma(t)\text{ で囲まれる領域}),\\ =0 & (x\in\Gamma(t)),\\ <0 & (x\in(\text{上記以外}))\end{cases}$$

となるように選ぶ．更に $\Gamma(t)$ の近傍では u の勾配ベクトル $Du(t,x)=(u_{x_1}(t,x),u_{x_2}(t,x))$*6) $(x=(x_1,x_2))$ は 0 でないとしておく．文献 9) に倣って計算すると各 $t>0$, $x\in\Gamma(t)$ における内向き法線方向に関する速度と曲率はそれぞれ

$$V=-\frac{u_t}{|Du|},$$
$$\kappa=\frac{-1}{|Du|}\left(\Delta u-\frac{\langle D^2uDu,Du\rangle}{|Du|^2}\right) \qquad (2)$$

となる．但し，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ は平面ベクトルの内積を表し，

$$\Delta u=u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2},$$
$$D^2u=\begin{pmatrix} u_{x_1x_1} & u_{x_1x_2}\\ u_{x_2x_1} & u_{x_2x_2}\end{pmatrix},$$

である．(2) の右辺の括弧の部分を $F(Du,D^2u)$ とおく．そこで，方程式 (1) を u で表すと

$$u_t=F(Du,D^2u),\quad t>0,\quad x\in\Gamma(t).$$

となる．これを x に関して全平面 $\mathbb{R}^2$ に拡張したものが (1) に対する**等高面方程式**である．

6. 等高面の方法による曲率流の構成

等高面の方法を用いて曲率流 $\{\Gamma(t)\}_{t\geq 0}$ を求めるには次のようにすればよい：$\Gamma(0)$ を与えられた単純閉曲線とし，連続関数 $u_0=u_0(x)$ を

$$u_0(x)\begin{cases} >0 & (x\in\Gamma(0)\text{ で囲まれる領域}),\\ =0 & (x\in\Gamma(0)),\\ <0 & (x\in(\text{上記以外}))\end{cases} \qquad (3)$$

*6) u_{x_1}, u_{x_2} はそれぞれ x_1, x_2 についての 1 階偏導関数を表す．u_t, $u_{x_ix_j}$ $(i,j=1,2)$ も同様である．

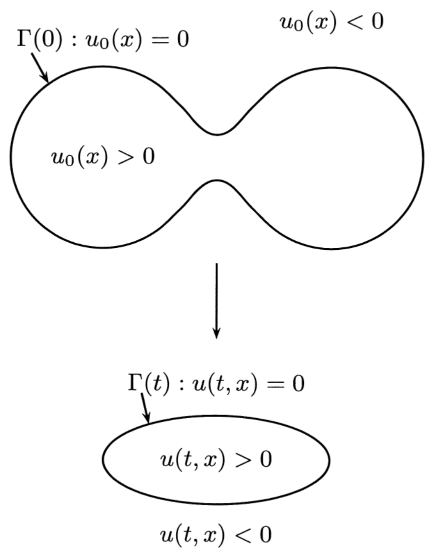


図 4　曲率流の構成例．

を満たすように取る．そして初期値問題

$$u_t=F(Du,D^2u), \qquad (4)$$
$$(t,x)\in(0,T)\times\mathbb{R}^2,\quad T>0$$
$$u(0,x)=u_0(x),\quad x\in\mathbb{R}^2 \qquad (5)$$

を解く．この初期値問題の解 $u=u(t,x)$ を使って，$\Gamma(t)=\{x\in\mathbb{R}^2\mid u(t,x)=0\}$ とおけばよい（図 4 参照）．

この手順における問題点について簡単に述べよう．まず，$F=F(Du,D^2u)$ による拡散の効果を考えてみる．任意に $c\in\mathbb{R}$ を取り，各 $t>0$, $x\in\Gamma_c(t)=\{x\in\mathbb{R}^2\mid u(t,x)=c\}$*7) に対して，少し込み入った議論をすると

$$F(Du,D^2u)=u_{\boldsymbol{rr}} \qquad (6)$$

と変形できる．ここで $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t,x,c)$ は $x\in\Gamma_c(t)$ における $\Gamma_c(t)$ の単位接線ベクトルであり，$u_{\boldsymbol{rr}}$ は $\boldsymbol{r}$ 方向に関する u の 2 階偏導関数である．この関係式は F による拡散の効果が各等高線 $\Gamma_c(t)$ の接線方向にしかないことを示しており，一様な拡散の効果をもつ通常の熱方程式と比べると大きく異なる．また，F は $Du(t,x)=0$ となる (t,x) では定義できないので，そのような (t,x) では (4)

*7) $\Gamma_c(t)$ は値が c の等高線である．特に $\Gamma_0(t)=\Gamma(t)$.

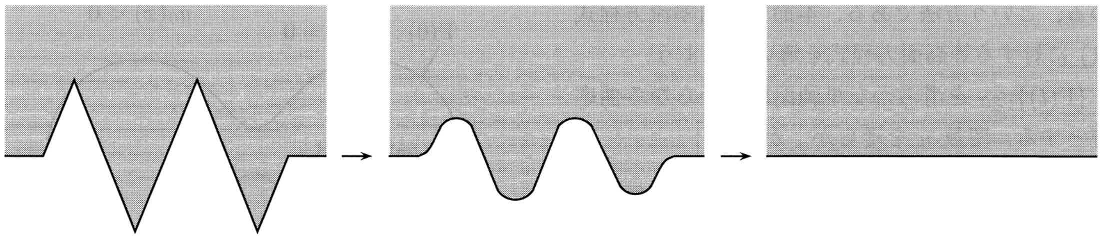


図 5　エッジの平滑化の例．グレーの部分が対象物．

は意味を持たない．そこで初期値問題 (4)–(5) を解くために**粘性解**と呼ばれる弱解の概念を用いる．

また，$\{\Gamma(t)\}_{t\geq 0}$ は $u(t,\cdot)$ の 0–等高線として定められる．これが初期条件 u_0 に依存するようだと，どの 0–等高線が正しい曲率流を表すのかがわからなくなってしまう．よって $\{\Gamma(t)\}_{t\geq 0}$ は u_0 の選び方によらないで $\Gamma(0)$ によってのみ定まることを示す必要がある．これは**幾何学的**と呼ばれる F の特徴的な構造を用いて証明される．

粘性解については文献 4, 15) を，等高面の方法による曲率流の構成に関しては文献 3, 5) を参照されたい．

7. 等高面の方法のエッジ抽出への応用

4〜6 節の結果を用いて曲率流や方程式 (4) の特徴がエッジを抽出するためにどのように使われるのかを簡単に見ていこう．

2 節でも触れたように，実際のエッジ抽出にはエッジの近くの画像情報を加味して方程式 (4) を修正したものが用いられる．

次のような方程式を考えてみよう．

$$u_t = g(|DG_\sigma * u|)F(Du, D^2u), \qquad (7)$$
$$(t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}^2.$$

ここで，$\sigma>0$, $G_\sigma = G_\sigma(x) = e^{-|x|^2/4\sigma}/\sqrt{4\pi\sigma}$ [*8] であり，$|DG_\sigma * u| = |DG_\sigma * u(t,x)|$ は

$$|DG_\sigma * u(t,x)|$$
$$= \left\{\sum_{i=1}^{2}\left(\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\partial G_\sigma}{\partial x_i}(y-x)u(t,y)dy\right)^2\right\}^{1/2}$$

で与えられる．g は，例えば $g(s) = 1/(1+s)$ $(s \geq 0)$ のような関数である．$u = u(t,x)$ は画像の濃淡（**グレースケール**と呼ばれる）を表現する関数であり，初期条件 $u(0,x) = u_0(x)$ は入力画像のそれを意味する．$Du(t,x)$ は画像の空間的な濃度変化を表すと考えられ，$|Du(t,x)|$ の大きい部分がエッジである．以下で $F = F(Du, D^2u)$ と $g(|DG_\sigma * u|)$ の役割を見ていこう．

6 節で F は等高線に関する接線方向にのみ拡散の効果があると述べたが，これはエッジがノイズで破壊されたり，埋もれたりしていてもその位置と鮮明度を維持し，かつエッジを滑らかに整形する効果（平滑化）がある．特に，エッジ平滑化に関しては，例えばエッジの一部が鋸の歯のようになっていたとしよう．それを凹凸が多い部分と見なせば，4 節で述べたように凹凸が徐々にならされていき，滑らかにエッジが整形されていく（図 5 参照）[*9]．

また $g(|DG_\sigma * u|)$ は F による拡散の効果をコントロールする役割を果たす．先ほど，$|Du(t,x)|$ が大きい部分がエッジであると述べたが，$Du(t,x)$ のみの大きさを見ていたのでは都合が悪く，x の周りの点における $Du(t,\cdot)$ の大きさも考慮してエッジであるかどうかを判断するほうがよい．そのために σ を小さく取った G_σ を使い，x の近くの $|Du(t,\cdot)|$ の平均 $|(DG_\sigma * u)(t,x)|$ を測るのである．$|Du(t,\cdot)|$ の平均が大きい（x の近くで濃度変化が大きい）と，x をエッジ上の点とみなして F の効果を抑制することで，エッジをより強調させ，$|Du(t,\cdot)|$ の平均が小さければ（x の近くで濃度変

*8)　熱核，ガウス関数等と呼ばれる．

*9)　実際には図 5 のように平坦になるまで平滑化を行わないで，対象物の形状に応じて適当なところで止める．

化が小さい)，x を領域の内部にあるとみなして F の効果を強めて平滑化を行うのである．

こうした作用が画像をうまく平滑化し，エッジはできる限り保持されるため，エッジが相対的に強調されることになる．それ故，方程式 (7) を使うことでエッジ抽出が可能になるのである．

実は，方程式 (7) をこのままの形で画像処理に使うにはまだ十分ではなく，更に修正した方程式が用いられる．これに関しては文献 1, 11) を参照してほしい．これらの文献には実際の数値計算例も与えられている．

8. 補足等

画像処理に関する電気・情報系の学部生向けの本として文献 6) を挙げておこう．これ以外にも教科書レベルの本は多いと思う．数学的な立場から画像処理を扱っている本として文献 2, 17) 等がある．

曲率流については，平面曲線に限って話を進めたが，空間内の曲面に対する平均曲率流，等高面の方法等は文献 9) に易しい解説がある．本格的な解説書として文献 8) を挙げておく．

画像処理に応用される数学はたくさんあり，本稿で扱った曲率流方程式の応用はその中の一つにすぎない．実際，最近の画像処理に関する研究ではフーリエ変換，ウェーブレット，微分幾何はもちろんのこと，変分法，特異点論，確率論，クリフォード代数等，応用されている数学が広範囲にわたっている[*10)]．今後も，数学の多くの研究が応用されることで画像処理の研究・開発もより進んで行くのだろうと筆者は思う．

参考文献

1) L. Alvarez, P.-L. Lions and J.-M. Morel, "Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion II", *SIAM J. Numer. Anal.*, vol.**29**, no.3, 845–866, 1992.

2) F. Cao, *Geometric Curve Evolutions and Image Processing*, Lecture Notes in Mathematics 1805, Springer, 2003.

3) Y.-G. Chen, Y. Giga and S. Goto, "Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equations", *J. Differential Geometry*, vol.**33**, no.3, 749–786, 1991

4) M.G. Crandall, H. Ishii and P.-L. Lions, "User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations", *Bull. A.M.S.*, vol.**27**, no.1, 1–67, 1992.

5) L.C. Evans and J. Spruck, "Motion of level sets by mean curvature", *J. Differential Geometry*, vol.**33**, no.3, 635–681, 1991.

6) 藤岡弘・中前幸治,『画像処理の基礎』, 昭晃堂, 2002.

7) M. Gage and R. Hamilton, "The heat equation shrinking convex plane curves", *J. Differential Geometry*, vol.**23**, no.1, 69–95, 1986.

8) Y. Giga, *Surface evolution equations—A Level Set Approach*, Monographs in Mathematics vol.**99**, Birkhäuser, 2006.

9) 儀我美一・陳蘊剛,『動く曲面を追いかけて』, チュートリアル 応用数学の最前線, 日本評論社, 1996.

10) M.A. Grayson, "The heat equation shrinks embedded plane curves to round points", *J. Differential Geometry*, vol.**26**, no.2, 285–314, 1987.

11) 平田大介, 堤正義, "画像処理における平均曲率流の差分近似法とその比較判定", 日本応用数理学会論文誌, vol.**5**, no.4, 411–422, 1995

12) 神谷淳・生野壮一郎・仲田晋・宮崎佳典,『理工系のための解く！ 微分積分』, 講談社サイエンティフィク, 2006.

13) M. Kass, A. Witkin and D. Terzopoulos, "Snakes: Active contour models", *Int. J. Comput. Vis.*, vol.**1**, no.4, 321–331, 1988.

14) 喜多泰代, "変形可能なモデルを利用した医用画像解析の動向", 日本医用画像工学会誌, vol.**12**, no.3, 180–186, 1994.

15) S. Koike, *A Beginner's Guide to the Theory of Viscosity Solutions*, MSJ Memoirs Vol.**13**, Mathematical Society of Japan, 2004.

16) 宮島静雄,『微分積分学 II—多変数の微分積分』, 共立出版, 2003.

17) G. Sapiro, *Geometric Partial Differential Equations and Image Analysis*, Cambridge University Press, 2001.

（いしい・かつゆき，神戸大学大学院海事科学研究科）

*10) http://coe.math.sci.hokudai.ac.jp/sympo/maipcv/ で最近の研究動向の一部を知ることができる．

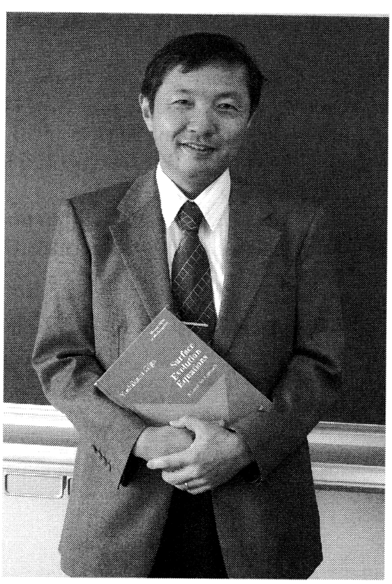
解析学の可能性

儀我　美一（聞き手：編集部）

1. 解析学は今どうなっているか

——解析学の現在の研究状況などをお聞かせいただけますでしょうか.

解析学と一口に言っても広い分野ですが，私が特に行っている偏微分方程式や変分問題などに関する研究について言うと，必要とされる人の数に比べて研究者の数が少ないという世界的傾向があると見ています．この研究に関して，社会で必要とされている人の数はどんどん増えているのですが，それに応えていける専門家の数が少ないのが現状です．



儀我美一氏.

計算機が発達すると数学がいらなくなるのではないかと昔はよく言われましたが，計算をすればするほどますます解析学が必要になる，というのが本当の所です．それはどうしてかと言うと，ある一つの問題をどうやってコンピュータで近似計算すればよいかを考えなくてはいけないからです．近似計算の仕方がよくわかっている問題ならばソフトウェアのパッケージを使えばいい場合が多いけれども，なければそれを自分で作らなければなりません．そのときに，どういった計算をしたら問題が解けるかを分かっていないといけないのです．特に無限次元の計算などは，有限に近似をしてコンピュータで計算しますので，それが果たして正当なものかどうかも確認しなければいけません．そもそもどうやったら有意義な近似計算ができるかどうかは，方程式の解析学的な構造をわかっていないとできないわけです．解析学的な構造というのは，ある量を動かしたときに解がどう変化するのかという性質のようなものと考えていただくといいと思います．ですから，それをよくわかっていないと近似もできないわけです．

一般用語としての「解析」の定義は，例えば『新明解国語辞典』（金田一京助他/三省堂）には，「複雑な機構をもつ現象の仕組みを解明するために細

かく分析すること」とあります．数学の世界では解析学のことをよく漫然と，関数を研究する，とも言われますが，単に関数を研究すれば解析学になるというものでもないと思います．また，微分が出てくるから解析学というのでもなく，「極限や収束をもっぱら扱う分野」であるとご理解いただくのがよいと思います．

こういう世界は計算機が発達すればするほど，もとの問題の解析学的な構造がわかっていないと困ってしまうのです．特に，ある問題の答えがただ一つかどうか，というのは計算機だけでは今のところ分かりづらい状況です．解の一意性がないと，近似計算で苦労して求めたものがどのような価値や意義があるのかはっきりわかりません．ですので，“解の存在と一意性”という解析学での用語が重要性を帯びてくるわけです．例えば正多面体は5種類しかないというように，「それしかない」ということをはっきり言える科学は数学しかないんですね．むしろそれが数学の特徴と言ってもいいと思います．そういうことをよく分かっていないと，どんなに計算機を使っても何をやっているのかわからなくなってしまうのです．ですので，どのような条件の下で解がいくつあって，その振舞いや形状などの性質はどうなっているのか，そういったことを研究していく必要があるわけです．その意味では地味な部分もありますし，今話したようなことをできる能力をもった人たちが増えていくことが望まれている，というのが現状です．

2. 海外の状況，他分野との交流

——海外と比較すると，その辺りの背景はいかがでしょうか．また，他分野との交流についてもお聞かせいただけますでしょうか．

日本の解析学には良い研究がたくさんあるのですが，特に海外に比べると多様性が少ないと思います．日本では数学のドクターをとっても企業などに行き場がなかったのですが，逆に海外では企業に行く人も多く，大学側もぼやぼやしていると，大学の研究の後継者がいなくなる可能性さえあるそうです．日本では，数学の研究能力（博士レベル）を活かしていける企業や他分野はこれまで少なかったのですが，近年徐々に双方の理解が進んできているようです．数学の博士号取得者が企業や他分野で海外先進国並に能力を発揮していけるようになることを願っています．

他分野との交流も，私個人は多少はあるのですが，全体的に見ると，海外に比べて日本の数学教室は忙しすぎるように思います．日本の数学者は入試など何から何までやっていて時間的余裕がとれない状況が多く，研究分野を広げる機会が少ないと思います．講演会などはやっていますが，継続して突っ込んで話ができて，共同研究までできるほどの時間的余裕がなかなかとれないという現実があると思います．また，他分野の方も，海外に比べて数学との協力体制が少ないと思います．

3. 解析学を学ぶための心得

——そのような現状の中で，解析学をものにしていくにはどういった道をくぐる必要があるでしょうか？ アドバイスも含めてお願いします．

何か一つの数学分野の名著をしっかり読むなど，一つのことを深くされるとよいと思います．そして，一方で興味を広くもたれるとよいと思います．これは山登りと一緒で，一つの山をきっちり登れば違う山もまた登ることができますが，一つも山を登ったことがない人は山登りの楽しさを知ることはできないのではないでしょうか．これと同じように，どの分野とは言いませんけれど，深く一つのことをよく勉強しておくことがまず大切だと思います．その上で，いろいろなものに興味を広げていくことです．

また，解析学では一見当然そうに見える定理の証明が大変ややこしいことがよくあります．定理そのものの証明をよく理解することも大切ですが，

定理が適用できる例をよく考えて理解することにより，その定理の有用性を汲み取ることが非常に重要であると思います．代数学では証明を通して定理がよくわかるというケースもありますが，解析学ではそうでないことも多くあって，証明を表層的にだけ見ているとかえってよく分からなくなるものがあるんですね．とにかく，“一つの数学分野を深く，興味は広く”，がポイントですね．

4. 社会への浸透

――本特集のテーマになりますが，解析学はどういった所に応用されたり，社会で使われているでしょうか．

私が想像するには，この先新たにいろいろなものを数値計算していくには，どうしても問題の解析学的な構造をもっと明らかにしていかなければならないと思います．偏微分方程式で言いますと，工学や技術開発において今まで使われていなかったタイプの偏微分方程式が活用されるなど，その広がりが目立ってきていますし，そのような手法はこれからますます浸透していくと思います．20年ほど前までは非線形と言うとかなり難しい問題で，現象を表す非線形方程式をどう理解するかということに終始していたのですが，今はだいぶ理解が進んできています．その結果，気楽に工学や技術に非線形方程式が活用されるようになってきました．例えば画像処理，特に医療画像などでは，非線形偏微分方程式を使っての研究は普及してきて，成果があがっています．

昔は応用と言っても，生物や物理での意味のある方程式を解析し，構造を研究していったのですが，これからは，自分で方程式を作っていろいろな問題に活用する，ということがますます盛んになってくると思います．昔は線形でなくては解析できなかったり，逆に線形化してから応用したり，といったやり方をしていましたが，これからは今話したような手法での他分野への応用がもっともっと広がっていくと思います．

今までは数学と言うと，物理とか化学や情報といった分野が周辺にあるとイメージされていたようですが，最近では社会学などの人文系への応用も盛んになってきています．一見，数学が必要と思われないような分野での活用が進んできています．むしろ，そうしないと研究が進んでいかないと思いますね．例えば都市計画などもそのいい例です．なぜそうなのかと言うと，昔と違って今はデータというものがたくさん取れるからなんですね．いろいろなデータが溢れているけれど，それをどうしていいか分からない．データがたくさんあっても，それをどう処理したり，その性質を調べるかは，統計を使うだけではなく，あるモデルを作って解析したりする必要があるわけですが，特に偏微分方程式の研究にはこれまでの蓄積があるので，そうした意味で重要な視野に入ってきているのだと思います．

ですので，これからはプロ級の数学研究者が様々な分野にいなければ大きな発展は期待できなくなるのではないかと感じます．そういった意味で，先ほど話した“一つの数学分野を深くやりつつ，興味は広くもつ”ということが大切になってくると思うのです．

5. 影響を受けたもの，重要な概念・キーワード

――先ほど，“一つの数学分野を深く，興味は広く”とおっしゃいましたが，先生が学んでこられた中で影響を受けたことなどがございましたらお聞かせいただけますでしょうか．また，重要と思われる概念などもお教え下さい．

そうですね，数式もありますが，概念のほうでは“弱解（ウィークソリューション）”というものに惹かれましたね．微分方程式では，普通は（古典的な意味では）微分できないと解とは言えないのですが，この弱解は，微分できない関数に対しても微分方程式の解を定義するもので，これは超

関数などにもつながっていくので，「なるほど，こういう解釈があるのか」と非常に面白く感じましたね．

数式では，一般的にもよく言われるオイラーの公式なども面白いと思いましたが，むしろ不等式に惹かれました．解析学ではソボレフの不等式といったものが出てきますが，今の社会を見てみると，何でも等式的に考えてガチガチしてしまって，もう少し不等式的に気楽に物事を見ていくことも大切なのではないかと思いますね．

それと，特にこの特集で重要になるキーワードは，先ほどの弱解もそうですが，変分解析，実解析といった概念になると思います．解析というのは計算ばかりしているように想像されがちですが，ソボレフの不等式もそうですが，本当はある量を見積もる計算というのが主体になっています．計算ばかりしているというイメージより，どの量がどの量に依存してコントロールされているか，などを調べているのが実像です．

6. 伝えたいメッセージ

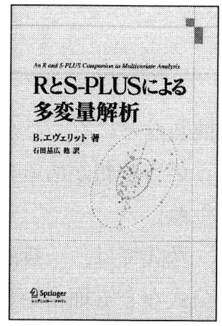
――学生や後進の方たちに何かメッセージがありましたらお願いします．

解析学には，その人の才能の種類に合わせていろいろなことができる，という多様性があります．そういった意味で，限定的なものではありませんから，自分自身と合うテーマはきっと見つかると思います．例えば，一つの概念を突き詰めて明らかにしていく研究もありますし，先ほど話したような他分野への応用もたくさんあります．どちらが良いというものではなく，むしろ才能を有効に活かしていける，スペクトルの広いものが解析学です．例えば，オーケストラで言えばバイオリンのようなもので，ソロでやってもいいし，他の楽器と合わせてやっても大きな発展が期待できます．数学はもちろん，様々な分野で解析学の研究能力の高い人材が活躍し，科学技術や社会の「深み」が増していくことを願っています．企業などは，今後こうした人材を求めていると思いますから，これからもっと交流があるといいなと思いますね．

――本日は貴重なお話をお聞かせ下さり，誠にありがとうございました．

（2007年7月，東京大学駒場キャンパス研究室にて）

（ぎが・よしかず，東京大学大学院数理科学研究科）



RとS-PLUSによる多変量解析

B. エヴェリット著，石田・石田・掛井訳，B5 変形判，256 頁，本体 3500 円，シュプリンガー・ジャパン

多変量解析の代表的手法を，統計解析システムであるSのフリー版であるRシステム，そして商用版であるS-PLUSを使って解説した良書である．著者が冒頭で力説するように，多変量解析手法によるデータ解析は探索的にならざるを得ず，対話的な計算機ソフトの利用が不可欠である．特に結果の吟味・解釈・提示には適切なグラフィックスの使用が必須である．本書では，頁数の半分近くを使い，数多くの実際的データを用いた解析プロセスが丁寧に紹介されており，両システムによる解析コードが示されている．使用データやシステム本体にない関数は著者のウェッブサイトから入手できる．兄弟ソフトであるRそしてS-PLUSによる解析コードの相似・相違点が分かるという意味でも興味深い．2つのシステム用コードを併記する形になってはいるが，現在統計データ解析の共通基盤の位置を占めつつあるRの使用を前提として出版ラッシュとなっているいわゆるR本の一つと見るのが適切であろう．訳文はよくこなれており読みやすい．訳者はまた，原著の解析結果やグラフィックス出力を，訳出時の最新版のRとS-PLUSを用いて追試しており，幾つかあるらしい相違点には訳注が与えられている．

章毎の内容を示すキーワードを以下に順に挙げる．

- 多変量データ：欠損値，単純・多重代入法，マハラノビス距離，データ探索，確証的分析．
- 多変量グラフィックス：散布図，凸包，カイプロット，2変数箱ヒゲ図，2変量密度推定，散布図行列，3次元プロット，条件付きプロット，トレリスグラフィックス．
- 主成分分析：主成分の再スケーリング，主成分数の選択，主成分得点．
- 因子分析：潜在変数，主因子分析，最尤因子分析，因子数の推定，因子の回転，因子得点の推定，因子・主成分分析の比較．
- 多次元尺度法：類似度行列，古典的多次元尺度法（主座標分析），対応分析，カイ二乗距離．
- クラスター分析：凝集型階層的クラスター分析，デンドログラム，クラスター間距離，最短距離法，最大距離法，群平均法，k–平均法，分類最尤法，BIC．
- 多変量分散分析と判別分析：ホテリングのT^2検定，フィッシャーの線形判別分析，多変量分散分析，分類関数，正準変数．
- 重回帰分析と正準相関分析：重回帰モデル，正準相関分析，正準変量．
- 反復測定データに対する線形混合効果モデル：経時測定データ，線形混合効果モデル，ランダム効果，データの脱落．

最後の話題は伝統的な多変量解析の紹介書では取り上げられることの少ない比較的新しい手法と言えるであろう．グラフィックスでも散布図，デンドログラムといった手法毎に固有な伝統的なグラフ以外に，3次元プロット，変数の独立性を見るカイプロットや2変数箱ひげ図といった新傾向の統計グラフがコードとともに紹介されている．各章には幾つかの演習問題が与えられている．巻末にはR，S-PLUSの操作法のまとめがあるが単なる備忘録である．実際の使用，特に自前のデータをデータフレーム等のデータ構造に編集するには，日本のRユーザーの情報サイトであるRjpWikiや，ここ数年日本でも幾つか出版されているR本が参考になるであろう．

この本のような統計ソフトの使用法を主軸とする本では，背景にある理論の紹介とのバランスがしばしば困難な問題になる．こうした理論，特に使われている統計量の正確な定義は，紹介されているコードによる解析だけでなく，独自の解析を試みるや否や必須になることが多い．この本では，関連理論の基礎のコンパクトなまとめを随所にあるコラムとして与え，解説の流れを中断しないようにする工夫がされている．更に，多変量解析の専門家ならではの，各手法を実際のデータに適用するにあたって避けられない問題（例えば欠損値の扱い），手法の様々なバリエーション，適用・解釈にあたっての注意・問題点，そして手法の限界の指摘が数多く要領よくまとめられており，参考になるであろう．また手法どうしの関連や，代替・最新手法，現在主流の手法への簡単な言及も役立つであろう．

この本はRもしくはS-PLUSを用いた実践的な多変量解析に対する基本的文献になるであろう．

間瀬　茂（東京工業大学大学院情報理工学研究科）

「数理科学」は語る

30年前から現代へのメッセージ

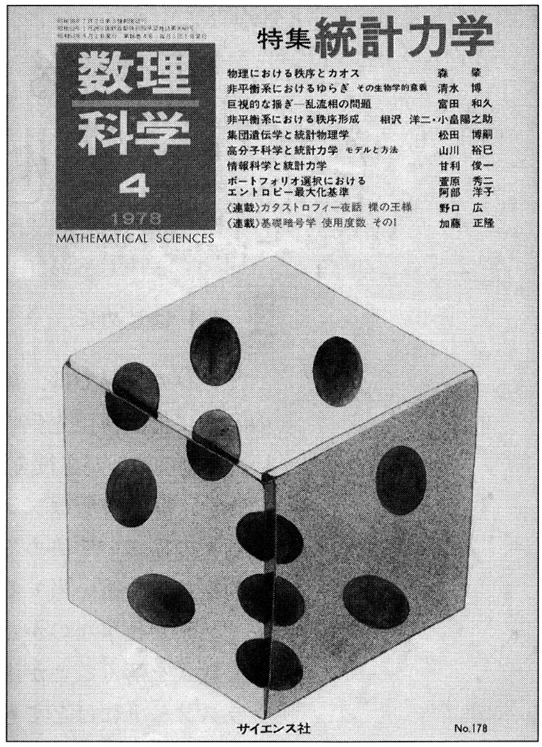
松田 博嗣

1978年4月号

「十年一昔」と言うから，1978年はもう三昔も前のことになる．この年本誌に特集された「統計力学」を読み返すと，70年代頃を境に統計力学の内容も研究者の雰囲気も目だって変わってきたようだ．60年代までは，統計力学は主に物性を研究するための理論であった．しかし，物性論の大きな課題であった超流動と超伝導の問題が一段落したかに見えたこの頃になると，統計力学的手法を物性以外の他の分野，例えば情報科学や集団生物学などに拡げようとする動きが活発になってきた．すなわちその対象を「もの」に限らず，「こと」にも及ぼそうとする動きである．

思えば，60年代は大学紛争や反体制運動に揺れた時代であった．1968年9月には京都で統計力学の国際会議が開かれたが，まだ学会の雰囲気自体はさして以前と変わらなかった．しかし，1971年にシカゴで開かれた次の会議にはひげをはやした出席者が目立った．ひげは非体制のシンボルらしく，ベトナム戦争反対や学生運動の影響がアメリカでは教授クラスの研究者にも波及しているのに驚いた．「何のための研究か」が日本物理学会でも厳しく問われた時代である．この会議のテーマは「新しい概念，新しい問題，新しい応用」で，招待講演のトップはフィールズ賞受賞者で，反戦運動家としても知られるSmale教授であった．「数学と力学についての個人的見解」と題して，「数学の主流が今ほど他分野から離れてしまったことはかつてなかった．今や数学者は再び現実との交渉を持つことによって，その内容を豊かにすべき」と述べられた．このとき私は物理学を主専攻としていたが，翌年九州大学に招かれて主専攻を数理生物学に転じた．それを可能にしたのは，新しいものにあこがれる70年代の空気であり，1978年の「統計力学」特集号の出現や内容もその反映であった．

その後，統計力学の領域は更に拡がり，カオス，カタストロフィー，フラクタルなどと，流行語が目まぐるしく変遷した．しかし，Smale教授の忠告の本質は

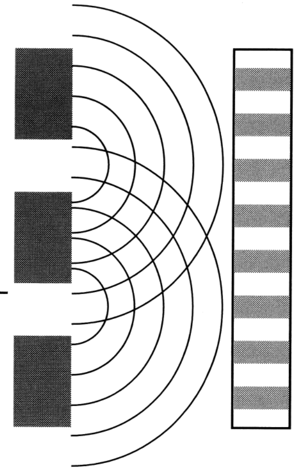


果たして生かされたであろうか．数学者も物理学者も業績主義や多忙に埋没して，視野はかえって狭まったのではなかろうか．研究が大衆化された現在こそ「何のための研究か」について，互いに論じあわねばならない．「温故知新」は論語の教えであるが，すぐれた多くの弟子を育てられた朝永先生も「今問題になっている新しいことについてあれこれ考える前に，それに関連した昔の論文をよく読んで歴史的に考えなさい」と言われている．湯川先生も，「明日進むべき道をさがし出すために，時々，昨日まで歩いてきたあとを，ふり返って見ることも必要」と言われている．競争心に駆られるままに，時間や金を浪費したあげく，「真の進歩は十年一日のごとし」とならないよう，色々考えてみたいものである．

（まつだ・ひろつぐ，九州大学名誉教授）

目で見て学ぶ量子力学

第1回 実験でひもとく量子の不思議



目で見るミクロの世界

外村 彰

1.1 はじめに

ミクロの世界では，常識を逸脱した現象がしばしば生じる．筆者は大学3年のときに梅沢博臣先生の講義で“量子力学”を学んだ．物理的な意味を持たない“波動関数”が主役を演じており，何だか不思議な理論だったが非常に魅力的だった．肝心な所はブラックボックスで，物理学とは思えない気がした．量子の個々の振舞いを決めることはできないが，理屈通りに計算をすれば，その集団的振舞いを言い当てることはできる．物理学は，シュレディンガー方程式を解く数学が仕事なのかという疑問すら生じて，ちょっと失望したりもした．でも，数式を解くことが決め手だということになると，周りの飛び抜けて優秀なクラスメートにはとても太刀打ちできない．

ここでは勝ち目がないと思って，企業の研究所に入った．それでも，いつの日か量子力学の基本に触れる実験をして，この神秘をこの目で見たい，ひょっとしたら量子力学の予言に反する実験結果でも出て来ないかという思いは抱き続けた．勿論，容易ではないことは重々承知している．量子力学に挑戦したL. ド・ブロイ，E. シュレディンガー，D.J. ボームそしてA. アインシュタインは，ことごとく討ち死している．とても立ち向かえるテーマでない．

学部を卒業して日立製作所中央研究所に就職し，たっての希望で電子顕微鏡の研究室に入った．提出されたばかりのボーム・パインズの理論[傍注1]を，たった1枚の電子顕微鏡写真で実証した世界的な研究者，渡辺宏氏に憧れてのことだった．研究室に入ってからは，電子顕微鏡に取り組む毎日だったが，この電子顕微鏡の中には，電子線が走っており，それが“不思議な振舞いをする帳本人”であると思うと，電子の不思議な振舞いを見たり，その不思議な性質を使った応用が拓けないものかと，好奇心を燃やし，想像力をかき立てられた．

［傍注1］ D.J. ボームとD. パインズが1951年に提案した固体中の電子の集団運動の理論．第3回で詳しく述べる．

自分のやりたいことが少しやれるようになった入社3年目，かねてから見た

いと思っていた電子線の波紋を見る実験を行った．

1.2 電子の波紋を見る

電子の波の様子を電子顕微鏡で観察するのは，当時でも不可能ではなかった．電子レンズ[傍注2]は，収差が大きく，欠陥だらけだった．電子顕微鏡の分解能を決めるのは，原理的には電子線の波長だが，電子顕微鏡の場合には，レンズの収差，とりわけ球面収差と色収差が分解能を決めている．収差を除くことができないというのは，技術者としては何とも情けない話だが，今でもその事情は変わっていない．収差を小さくしたければ，レンズを変えるしかないが，レンズの非軸対称性などによって生じる非点収差は自分で補正する．実際，どこまで非点を小さくできるかの腕前で分解能が決まってしまう．如何にうまく非点補正ができるかが勝負なので，電子顕微鏡屋は，競って操作の熟達に精進した．

［傍注 2］ 電子レンズはガラスでできている訳ではなく，電場や磁場でできている．詳しくは，第 2 回で述べる．

非点補正には，フレネル縞がしばしば使われてきた．フレネル縞は，像のピントをずらすと物体の縁に現れる．きれいな円形の膜穴を少しピンボケにすると，穴の縁で散乱された波と穴の中を通った波が干渉して穴の縁に沿ってフレネル縞が生じる．

電子レンズに非点収差があると，円筒レンズの効果が加わって，フレネル縞に影響が現れる．焦点距離が方向によって異なるため，左右方向は，ピンボケなので縞が出ても，上下方向はピントが合っているので縞が出なくなると言った具合である．この非点を補正するために，小さな磁性体やコイルなどを電子レンズの中に出し入れしたり回転したりして，円筒レンズの強さや向きを調整して，フレネル縞が全方向にわたって均一になるように調整する．電子顕微鏡の到達分解能は，非点を如何に完璧に除けるか否かで決まっていた．

非点収差補正で用いるフレネル縞は，普通 1 本しか出ていないので，干渉縞といったイメージからはほど遠い．だが，ピントを大きくずらして，照射電子線の平行度（半角：β）を良くすると，空間的な可干渉距離（$=\lambda/(2\beta)$，λ：電子線の波長）が長くなり，たくさんの縞が穴の内部全面に観察できる（図 1.1）．

ただ電子線の開き角 β を小さくすると，β^2 に比例して電子線の強度が急激に減少し，まっ暗になってしまうので，蛍光板上で干渉縞を直接見ることはできない．フィルムに長時間露光して初めて観察できる．

図 1.1 に示したような電子の波紋を見ると，電子が波であることを実感する．量子力学の世界を見た気がする．

1.3 きれいな波紋の電子波を作り出す

それほど苦労しないで電子の波紋を見られるようにするには，どうしたら良いのだろうか？

レーザーのように，たくさんの干渉縞をじかに見ることができたら，電子の波動性をもっと肌で感じ，きっと感動することだろう．暗闇の中で，闇雲にシャッ

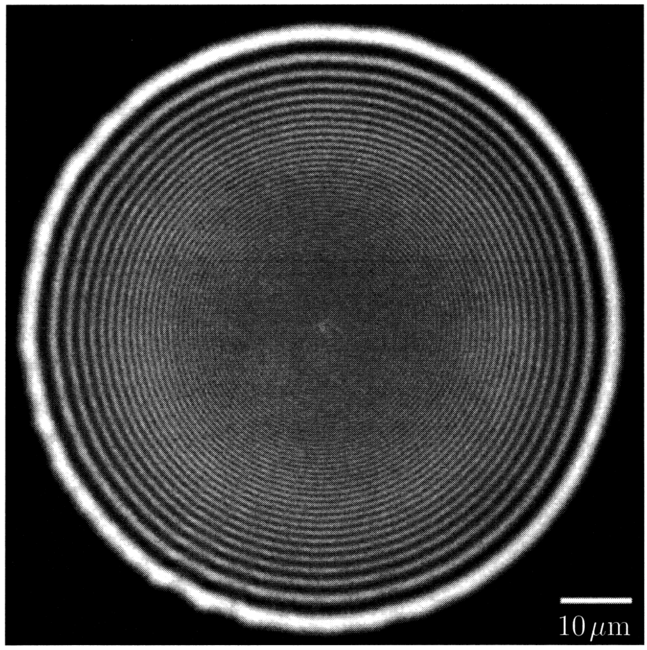


図 1.1　膜穴いっぱいに生じたフレネル縞.

ターを切っている現状を思うと，どんなに実験がやりやすくなるだろう．きっと実用的に利用できるようになるだろう．

入社 3 年目に始めた干渉実験の経験から，電子線ホログラフィー[傍注3]を実用化するには，レーザーのような電子線が必須であることを実感していた．

［傍注 3］　第 2 回でも説明する．

そもそも，どんな性質の電子線であれば，干渉縞をはっきりと明るく観察できるのだろうか？

テレビの画像は明るくなくてはならないので，ブラウン管の電子銃では，1 mA[傍注4] 以上という大電流の電子線を使っている．しかし，電子線の強度が強いだけでは干渉縞は生じない．干渉を起こす条件は，光の場合と変わらない．

［傍注 4］　1 mA（ミリアンペア）は 1 A（アンペア）の 1000 分の 1.

まずは，波長が揃っていなければならない．電子の波長はド・ブロイの式 $\lambda = h/mv$（h：プランク定数，m：電子の質量，v：電子の速度）で与えられる[傍注5]．このため，電子の速度（あるいはエネルギー）が揃っている必要がある．幸いなことに，電子顕微鏡用の電子線には，エネルギーのばらつきの少ない電子線が開発されてきた．エネルギー幅が大きいと，レンズの色収差で分解能が悪くなってしまうので電子顕微鏡には使いものにならない．それでも，ヘアーピン型の熱電子線では，加速電圧に換算して 3 ボルトぐらいのエネルギーのばらつきがあった．もっとずっと小さなエネルギー幅を持つ単色性の良い電子線はないものだろうか？

［傍注 5］　ド・ブロイの式を見ると電子の速度を増すと，波長がどんどん短くなることが分かる．逆に遅くすると，波長は長くなる．$v = 0$ にして電子を静止させたらどうなるのだろうかと心配したことがある．λ は無限大になる．電子は無限に広がってしまうのでは？ その通りである．不確定性原理で，速度をゼロにすると，位置が不確定になり，1 個の電子も 1 m にも広がってしまう．実は，完全に静止させようとしても量子力学では零点振動が残って，そもそも速度を完全にゼロにすることはできない．

干渉縞を得るためのもう一つの条件は，電子線の平行度を良くしなければならないことである．たくさんの干渉縞を得ようとすると，むしろこの条件のほうが決め手になる．平行度を良くするだけなら，小さなピンホールを通せばよ

い．問題は，平行度を 10^{-8} rad にしても，干渉縞が撮影できるほど明るいか否かである．それは，“輝度”傍注6 の値で決まる．その輝度は，電子が陰極から放出されるときの状況と加速電圧で決まる．熱電子の場合には，陰極から高密度の電子を放出させようとしても，陰極表面近傍に電子が溜まってしまって，電荷の反撥でそれ以上の電子放出が遮たげられる．これは “空間電荷効果” と呼ばれている．

1950 年代に新しい陰極として東北大学の日比忠俊によってポイント・フィラメントが開発された．これはヘアーピン型フィラメント傍注7 の先に針を付けたものなので，針先の電界が強くなって空間電荷の効果が緩和され電流密度が高くなる．電子を放出する面積が小さくなるので，ヘアーピン型フィラメントで 0.1 mA つまり 100 μA だった全電流が，1 μA 以下になる．全電流は 2 桁も小さくなるが，“輝度” は高くなる．10 万ボルトに加速したときの電子線の輝度は，ヘアーピン型フィラメントでは 10^5 (A/cm^2 · ster)傍注8 だが，ポイント・フィラメントでは 10^6 になる．

ポイント・フィラメントの出現は 1960 年代後半の高分解能電子顕微鏡の分野に重要な役割を果たした．電子線のエネルギー幅が減少し色収差の効果が減少したため，高分解能用の電子銃として活用されるようになった．1968 年には，ホログラフィーが電子線でも可能なことが筆者らによって示されたが，これもポイント・フィラメントの高輝度性のお陰であった．ただ電子線ホログラフィーの可能性が示されたとは言え，寿命を犠牲にしたため 1～2 日でフィラメントが切れてしまう有様だった．そんな使い方をしても，レーザー光に較べれば干渉性能は物の数ではない．もっと輝度の高い電子線はないものだろうか？

［傍注 6］ 単位面積，単位立体角あたりの電子流のことを指す．平行度の良い電子線を得ようとすると，高輝度でなければ暗くなってしまう．電界放出電子線は熱電子線に比べて 3 桁から 5 桁も輝度が高い．

［傍注 7］ 髪の毛ほどの細いタングステン線をヘアーピンのように曲げて電流で白熱し，先端から熱電子を得るのがヘアーピン型フィラメント．第 2 回で述べる．

［傍注 8］ 輝度は，電流密度 A/cm^2 をさらに立体角で割ったものなので，立体角の単位であるステラジアン (steradian) で割って，単位は A/cm^2 · ster となる．

1.4 レーザーのように波面の揃った電子の波

波長が揃い，輝度の高い電子線として “電界放出電子線” が優れていることは，既に 1950 年代から注目されていた．電界放出は金属針の先端に電界を集中させて，トンネル効果で電子を放出させる．しかし，針の太さは 0.1 mm，先端は 0.1 μm (図 1.2) という細さである．髪の毛が触れただけで先端が曲がってしまう．おまけに，放電現象のようなものなので，安定に電流を得るには，超高真空中でなければな

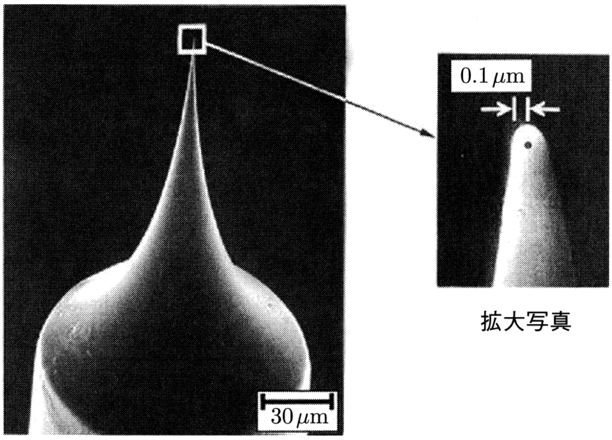


図 1.2　電界放出型電子線用の針状陰極．

らない．ちょっとでも放電したら，過電流が針先に流れて先端が融けて丸まってしまい，使いものにならなくなる．当時，これを電子銃として実用化する試みが世界中で数多くなされたが，いずれもうまくいかなかった．

針を使った電子銃の実用化に成功したのは，シカゴ大学のA.V. クリューである（図 1.3）．1968 年のことである．この高輝度電子線によって走査型電子顕微鏡（SEM）[傍注9]の分解能が 1 桁向上し，走査型透過電子顕微鏡（STEM）[傍注9]によって 1 個の原子の観察が可能になった．

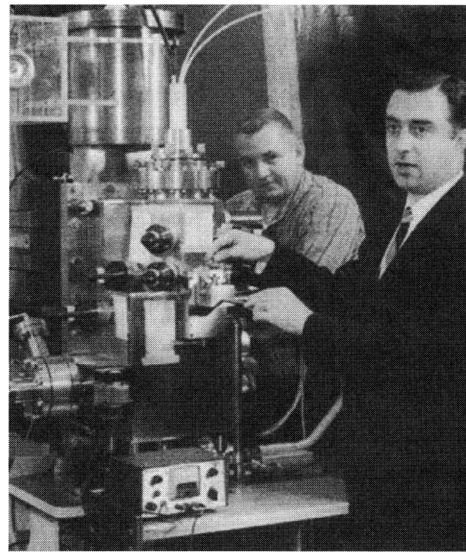


図 1.3　A.V. クリュー（右側）．

［傍注 9］　通常の電子顕微鏡は，薄膜試料全体に電子線を当てて透過電子線をレンズで拡大して観察するが，走査型電子顕微鏡では電子線の細いプローブを試料に当てて上下左右に走査し，反射電子（SEM）や透過電子（STEM）を検出してモニター上に像を描く．詳しくは第 2 回で説明する．

ちょうどその頃，筆者は電子線でホログラフィーの可能性を示したところであった．しかし，その実用化のためには，明るく干渉性のよい電子線の必須性を痛感していた．電界放出電子線で，輝度が桁違いに高くなれば，電子線ホログラフィーの可能性は飛躍的に向上する．1967 年から直ちに開発にスタートしたものの，電子源が 50Å とあまりに小さいために，透過型電子顕微鏡の電子銃として用いるのにはいくつもの技術的困難を解決しなければならず，結局 10 年もの歳月を費すことになった．

SEM 用の電子銃として完成されたものが，何故そのまま透過電子顕微鏡（TEM）に使えないのかと疑問に思うかもしれない．一つには，SEM の場合，加速電圧は 3 万ボルトで充分だが，TEM では 10 万ボルト以上が必要となる．また SEM では，電子線を小さなスポットに縮小さえすればよいのに対して，TEM では電子線を試料全体に当てる必要がある．そのために，大電流が必要となったり，像の倍率を変えるたびに電子線が照射する領域を変化させる必要があるので照射レンズ系が長くなる．しかも干渉現象を観測するには照射角 β を極めて小さく（10^{-8} rad まで）しなければならない．

それまで熱電子線では干渉縞を蛍光板上で直接見ることは不可能だった．ちょうど夜空の暗い星を長時間かけて露光するように，暗闇の中で息を殺してフィルムに露光し現像してみて初めて，撮影できたかどうか分かる．そんな条件にしても，最大 300 本しか干渉縞は撮影できなかった．ところが，筆者らが 1979 年に開発した装置では 3000 本もの数の干渉縞が撮影できたのである．しかも，50 本くらいの干渉縞なら蛍光板上で肉眼で見える．これが波面の揃った干渉性の良い電子波が誕生し，電子線ホログラフィーが実用レベルに達した日である．

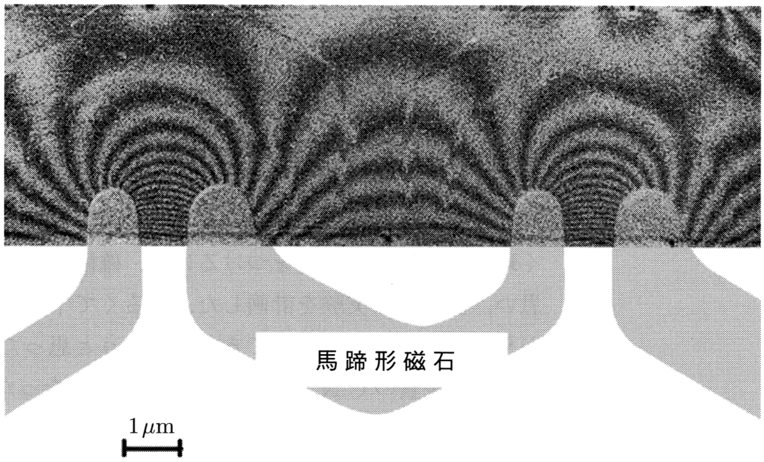


図 1.4　小さな馬蹄形磁石からの磁力線を電子の波で見る（干渉顕微鏡像）.

1.5 電子の波でミクロの世界を見る
―磁力線，金曜講話，AB 効果，そして二重スリットの実験―

この電子線の登場によって思いもかけない新しい応用が開けた．電子の平面波をミクロの磁場にあて，通過した波面の等高線を観察すると，それが，そのまま定量的な“磁力線”を示すことが見出された（図 1.4）．

磁力線の概念は，19 世紀半ばに M. ファラデーによって考案された．ファラデーは，砂鉄をふりかけて磁力線の様子を見たが，電子の波で見る磁力線は，そんないい加減なものではない．干渉縞の形で観測できる磁力線は一定の微小磁束 $h/e = 4 \times 10^{-15}$ ウェーバー[傍注10]（h：プランク定数，e：電子の電荷）毎に現れる．これは，どんな加速電圧の電子線を使っても同じである．電子の波と磁場との相互作用には，何か本質的な物理があるに違いないと感じた．

[傍注10]　1 ウェーバーは磁束の単位．リング状のコイルに磁場を加えて増やすと，リング状の電場が生じてコイルに電流が流れる．1 秒間で 1 ボルトの電圧を誘起するときに変化した磁束の量を 1 ウェーバーと言う．

この手法を用いて，磁性体や磁性微粒子，磁気テープなどの磁力線の観察に夢中になっていた頃，当のファラデーが創設した金曜講話への招待の話が舞い込んだ．話を聞くと，そこには蝶ネクタイの人たちが集まり，写真も撮ってはいけないいかめしい会だと聞いていた．ところが講演の様子はビデオに撮られ，BBC（英国放送協会）でも放映された．ビデオ撮りの際に，床に座ってモニターを見ながら采配していた人をてっきり BBC の技術者と勘違いし

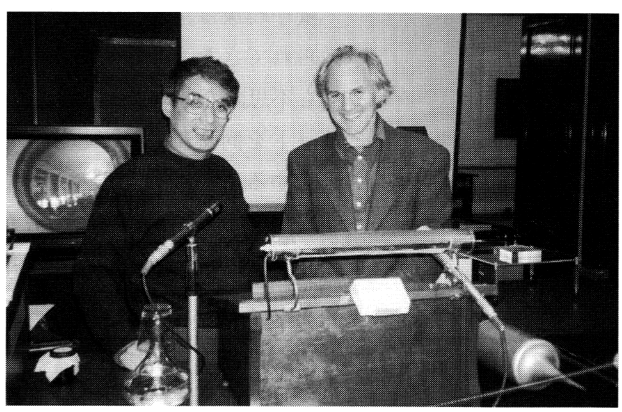


図 1.5　英国王立協会金曜講話における H. クロトー（右側）.

たが，実は後にノーベル賞をもらうH. クロトー教授だと後に分かった（図1.5）.

1978年，量子力学の基礎現象，アハラノフ・ボーム（AB）効果[傍注11]に関する激しい論争が起こった．電子線は電場も磁場もない所を通り，全く力を受けていない．にも拘わらず電子線の波面がずれ，干渉縞がずれてしまうことがあると言う．波面をずらしたのは，数学的な補助量だと思われていた“ベクトル・ポテンシャル”[傍注11]だということで，論争にまで発展していた．延々と続く理論上の論争に決着をつけるには，確固たる実験事実を確立するしかないと思い，決定的な実験を計画した．明るくて干渉性の良い電子線を開発した我々がやらなければ，誰にもできないだろうと思った．

［傍注11］ 第8回，第9回，第10回で詳しく述べる．

ノーベル賞のC.N. ヤン先生とお近づきになったのもAB効果がきっかけだった．ヤン先生は，「AB効果こそが，ゲージ理論の唯一の実験的証拠」であると主張され，このため我々の検証実験に関心を持ち，たまたま日本訪問の折にわざわざ日立中研にまで訪問してくれた．

論争中だったこともあって，1982年の我々の最初の結果に対して反論が出て，何種類もの実験を行うはめになり，6年がかりでやっと決着をつけることができた．

量子の不思議はAB効果に限らない．ノーベル賞受賞者のR. ファインマンは彼の教科書の中で，こう述べている．「電子をまばらに発射したときの二重スリットの実験[傍注12]は，まさにミステリーで，古典的には解釈できない．ここに量子力学の真髄がある．しかし，この実験は，スケールが非常に小さいので，そのままの形で行うことはできない.」

［傍注12］ 第6回，第7回で詳しく述べる．

ところが，輝度の高い電子線や高い感度の検出器などの先端技術の開発によって，この思考実験も実現可能になった．電子は，1個1個間を置いて送られるので，装置の中を，時たま通るだけである．ところが，その電子がやってくるのを長時間観察していると，電子の波が2つのスリットを同時に通ったときに現れる干渉縞が姿を現す．

量子現象は，かつて，デバイスのトレンドに究極の限界を与える邪魔者と考えられてきた．しかし，最近では，二重スリットの実験で示された量子力学の最も不思議な原理が，実用に供されようとしている．1個の電子がいくつものスリットを同時に通ってしまうという現象を使えば，いくつもの状態で並行して計算することができるので，驚異的なスピードの“量子コンピューター”[傍注13]が実現する．また，電子の波が途中で傍受されると，波動関数が収縮して粒子として検出され，波の状態は瞬時に破壊されてしまうので，“破ることのできない暗号システム”も可能になる．

［傍注13］ 第18回で触れる．

今，理化学研究所のフロンティア研究システムでは，単量子操作プロジェクトを行い，量子現象の観察から新しいデバイス開発に至る研究を行っている．

物理学の巨匠を悩まし続けてきた量子力学の最も不思議な現象は，今や実用の世界に直結しようとしている．

1.6 おわりに

“ミクロの世界を見る”，“量子の世界を見る”——これは私の夢である．とりわけ，たった1枚の電子顕微鏡写真で，ボーム・パインズの理論を実証した渡辺宏氏や，見事な電子線の干渉実験を行ったG. メレンシュテット，そして誰もが諦めていた“針の先から出てくる電子線”の実用化を果たし，原子を初めて見たクリューといった先達に憧れを抱いていた．でも，その1枚の写真を撮るには，“技術”と“技”が必要である．1980年代になって量子力学を，じかに見られるようになってきたのも，干渉性の良い電子線を初めとする先端技術のお陰である．この連載では，この40年間に私自身が挑戦した実験や私の身近で行われた驚くべき量子力学の実験について触れてみたい．初回に，概略を紹介したいと思って，いろいろ理解しにくい言葉が出てきて，戸惑った読者もいると思う．そこで第2回目では，その説明を兼ねて電子線の世界を紹介することにする．

（とのむら・あきら，日立製作所フェロー／理化学研究所グループ・ディレクター／沖縄科学技術研究基盤整備機構代表研究者）

ゲーム理論講義

最終回

シャープレイ値の投票問題への応用

船木 由喜彦

投票は，委員会や議会などでグループ意志決定を行う際に通常に用いられる手段であるが，各投票者がどの程度のパワーや影響力をもつかは，そう単純に評価できるわけではない．今回は，前回紹介したシャープレイ値を用いて投票における投票者のパワーを分析することにしよう．

16.1 投票ゲーム

委員会や議会における意志決定や投票制度を提携形ゲームで表現することを考えてみよう．これらの制度において，提携を形成すると，自分たちが同一の投票行動をとることにより必ず好みの結果を実現することができる場合がある．例えば，プレイヤーの全体提携はこの性質を満たす．このような性質をもつ提携を**勝利提携**と呼ぶ．プレイヤー集合と勝利提携の集合で表現されたゲームを**投票ゲーム**と言う．すなわち，$\mathcal{W}$ を勝利提携の集合とすると，投票ゲーム $(N, \mathcal{W})$ で表される．一般に投票ゲームは次の性質を満たすことが仮定される．

1) $N \in \mathcal{W}, \quad \emptyset \in \mathcal{W}$.

2) $S \in \mathcal{W}$ ならば $N \setminus S \notin \mathcal{W}$.

3) $S \in \mathcal{W}$, $S \subseteq T$ ならば $T \in \mathcal{W}$.

ここで，2) は 2 つの対立する勝利提携が存在しないこと．3) は勝利提携を含む提携は勝利提携となること，すなわち，単調性を要請している[傍注1]．

投票ゲームは勝利提携の提携値を 1，そうでない提携の提携値を 0 とすることで特性関数形ゲームとして表現することができる．すなわち，$S \in \mathcal{W}$ のとき $v(S) = 1$, $S \notin \mathcal{W}$ のとき $v(S) = 0$ と表すことができる[傍注2]．

あるプレイヤー j を含むすべての提携のみが勝利提携であるとき，$\mathcal{W} = \{S | S \ni j\}$ となる．このとき，このプレイヤー j を**独裁者**と呼ぶ．上記の仮定

[傍注1] 性質 2) を満たす投票ゲームをプロパー投票ゲームと呼ぶことがある．

[傍注2] すべての提携の提携値が 0 か 1 のゲームは単純ゲームと呼ばれている．投票ゲームは条件 1)〜3) を満たす単純ゲームと考えることができる．

1)〜3) の下で，一つのゲームに独裁者が2人以上存在することはない．さらに，すべての勝利提携 $S \in \mathcal{W}$ に含まれているプレイヤー i のことを **拒否権プレイヤー** と呼ぶ．あきらかに，独裁者は拒否権プレイヤーである．また，全員一致ゲーム $\mathcal{W} = \{N\}$ では，すべてのプレイヤーが拒否権プレイヤーとなる．

勝利提携 $S \in \mathcal{W}$ において，すべての部分集合 $T \subset S$ が勝利提携でないとき，その提携 S を**極小勝利提携**と言う．極小勝利提携の全体を $\mathcal{W}^m$ と表すことにしよう．極小勝利提携 S に属するすべてのプレイヤー $i \in S$ に対し，$v(S) = 1, v(S \setminus \{i\}) = 0$ が成り立つことに注意しよう．また，単調性を満たす投票ゲームでは $\mathcal{W}^m$ を定めると自動的に $\mathcal{W}$ が $\mathcal{W} = \{T|$ ある $S \in \mathcal{W}^m$ に対して $T \supseteq S\}$ により一意に求まる．どの極小勝利提携にも含まれないプレイヤー i に対しては $v(S) = v(S \setminus \{i\}) = 0$ または $v(S) = v(S \setminus \{i\}) = 1$ が成り立つから，提携形ゲームの**ナルプレイヤー**になる．なお，独裁者がいるゲームにおいて，独裁者の1人提携が唯一の極小勝利提携となるので独裁者以外はすべてナルプレイヤーである．

例として，プレイヤー集合が $\{\mathrm{A, B, C, D}\}$ であり，極小勝利提携が $\mathcal{W}^m = \{\mathrm{AB, AC}\}$ で与えられるような投票ゲームを考えると，$\mathcal{W} = \{\mathrm{AB, AC, ABC, ABD, ACD, ABCD}\}$ となり，A は拒否権プレイヤー，D はナルプレイヤーである．

16.2 シャープレイ・シュービック投票力指数

投票ゲーム $(N, \mathcal{W})$ を特性関数で表したゲーム (N, v) のシャープレイ値を，投票ゲームの**シャープレイ・シュービック投票力指数**（以下，投票力指数と略す）と呼ぶ．それは，次のように計算される．

$$\begin{aligned}\phi_i(\mathcal{W}) &= \sum_{S:v(S)=1, v(S\setminus\{i\})=0} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \\ &= \sum_{S:S\in\mathcal{W},\ S\setminus\{i\}\notin\mathcal{W}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}.\end{aligned}$$

ここで，$n = |N|$, $s = |S|$ である．シャープレイ値の全体合理性公理から投票力指数の総和は1であることに注意していただきたい．

シャープレイ値のもう一つの表現式を使うと，投票力指数は次のように求めることもできる．議案がランダムに提出され，プレイヤーの支持もランダムに定まっているとする．このとき，ある議案に対し，その議案を支持する人から順に投票をしていった場合，自分の投票で否決の状態から可決の状態に変化させるプレイヤーのことを**ピボットプレイヤー**と呼ぶ．すなわち，プレイヤー i が順列 π においてピボットであるとは，$S_{\pi,i} \cup \{i\} \in \mathcal{W}$ かつ $S_{\pi,i} \notin \mathcal{W}$ を満たすことである**傍注3**．Π_i を i がピボットとなる順列の集合としよう．i のシャープレイ値は，すべての順列が等確率で起こると考えたときの i がピボットとなる確率と考えることができるので，$\phi_i(\mathcal{W}) = \frac{|\Pi_i|}{n!}$ である．

[傍注3]　$S_{\pi,i} = \{j \in N | \pi(j) < \pi(i)\}$.

投票力指数は，特性関数形投票ゲームのシャープレイ値であるから，シャープレイ値の公理を満たす．しかし，そのようなゲームのクラスにおいて公理的な特徴づけを行うためには，加法性などの公理を修正することが必要である．プレイヤーの対称性についても若干の修正が必要であり，投票ゲーム $(N,\mathcal{W})$ において，2人のプレイヤー i と j が対称であるとは，各 $S \subseteq N \setminus \{i,j\}$ に対し，

$$S \cup \{i\} \in \mathcal{W} \iff S \cup \{j\} \in \mathcal{W}$$

が成り立つことである．これらの議論に関して興味ある読者は文献1,2) などを参照していただきたい．

それでは，これらの式を基に，各プレイヤーの投票力指数を求めてみよう．投票ゲームのプロパー性から，特性関数は優加法性を満たすので，投票力指数が負になることはない．さらに，ナルプレイヤーの投票力指数は0であるので，独裁者の投票力指数は1になる．

前節の投票ゲーム $N = \{\mathrm{A,B,C,D}\}$, $\mathcal{W}^m = \{\mathrm{AB,AC}\}$ の投票力指数を求めてみよう．D はダミーであるから $\phi_{\mathrm{D}}(\mathcal{W}) = 0$ である．すべての順列の個数は $4! = 24$ 通りあり，さらに，B と C は対称である．B がピボットになるすべての順列を求めると「ABCD, ABDC, ADBC, DABC」の 4 通りである．したがって，$\phi_{\mathrm{B}}(\mathcal{W}) = \phi_{\mathrm{C}}(\mathcal{W}) = \frac{1}{6}$ となる．全体合理性公理より $\phi_{\mathrm{A}}(\mathcal{W}) = 1 - \phi_{\mathrm{B}}(\mathcal{W}) - \phi_{\mathrm{C}}(\mathcal{W}) - \phi_{\mathrm{D}}(\mathcal{W}) = \frac{2}{3}$ となる．

次に，プレイヤー1だけが拒否権プレイヤーである投票ゲームを考えてみよう．そのようなゲームはたくさんあるが，その中でも $\mathcal{W}^m = \{\{1,k\} | k \in N \setminus \{1\}\}$ の場合の投票力指数を求める．このとき，プレイヤー1がピボットにならないような順列は1が最初に来る順列だけである．そのような場合の数は $(n-1)!$ 通りあるので，1がピボットになる順列の総数は $n! - (n-1)! = (n-1)!(n-1)$ になる．したがってプレイヤー1の投票力指数は $\frac{(n-1)!(n-1)}{n!} = \frac{n-1}{n}$ となる．他のプレイヤーは皆対称であるので，彼らの投票力指数は $\frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{n(n-1)}$ となる．1のパワーは他のプレイヤーのパワーの $(n-1)^2$ 倍である．このように拒否権プレイヤーは必ずしも，投票力指数1を獲得するとは限らない．

16.3 重み付き多数決ゲーム

各プレイヤーがそれぞれの重み（票数）を持ち，提携の重みの和がある規準数を上回ると勝利提携となるゲームを**重み付き多数決ゲーム**と呼ぶ．例えば議会において，各議員が所属する政党における合意に従って投票し，それらの政党をプレイヤーと考えれば，このような状況は重み付き多数決ゲームとなる．各プレイヤーの重み（票数）q_i と可決に必要な最小票数 w とすると，重み付き多数決ゲームは $[w : q_1, q_2, \cdots, q_n]$ で表される．このとき，投票ゲームの勝利提携は

$$S \in \mathcal{W} \iff \sum_{j \in S} q_j \geq w$$

で与えられる．$\sum_{j \in N} q_j \geq w > \frac{1}{2} \sum_{j \in N} q_j$ を満たせば，プロパーな投票ゲー

ムとなる．

3 人多数決ゲーム $N=\{\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C}\}$, $\mathcal{W}^m=\{\mathrm{AB},\mathrm{AC},\mathrm{BC}\}$ は，$[2:1,1,1]$, $[3:2,2,2]$, $[4:3,3,2]$ など，多様な表し方で重み付き多数決ゲームは表される．最後のケースでは重みが同じでないことに注意していただきたい．いずれにせよ，プレイヤーの対称性から $\phi(\mathcal{W})=(1/3,1/3,1/3)$ となる．

いくつかのゲームの投票力指数を求めてみよう．ある会社の株式は 5 人の株主によって保有されており，その保有率は 40%，20%，20%，10%，10%であるとする．このとき，株主総会において株式 51%以上の多数によって決定がされるとき，このゲームを重み付き多数決 5 人ゲームとして定式化し，投票力指数を求めてみよう．

この重み付き多数決ゲームは $[51:40,20,20,10,10]$ あるいは $[6:4,2,2,1,1]$ など，様々な表し方があるのはすでに述べたとおりである．ここでは後者の表し方で，それぞれ 4, 2, 2, 1, 1 の票数を持つプレイヤーを A, B, C, D, E とする．そのとき，極小勝利提携は，$\mathcal{W}^m=\{\mathrm{AB},\mathrm{AC},\mathrm{ADE},\mathrm{BCDE}\}$ となる．それぞれの投票力指数は，すべての順列の数 $5!=120$ の中で，各プレイヤーがピボットとなる場合の数を計算すればよい．

D がピボットになるのは，D の前に 5 票投票されている場合だけである．そのような場合は A と E が D の前に投票するか B, C, E が D の前に投票するケースしかない．前者の場合は「AEDBC, AEDCB, EADBC, EADCB」の 4 通り，後者の場合は，BCE の順列の数と同じで 6 通りある．合計 10 通りが D がピボットになる場合の数である．D と E は対称であるから $\phi_{\mathrm{D}}(\mathcal{W})=\phi_{\mathrm{E}}(\mathcal{W})=\frac{10}{120}=\frac{1}{12}$ である．

B がピボットになるのは，B の前に 4 票か 5 票投票されている場合だけである．4 票投票されているケースは A の次に B が投票するか C, D, E の 3 人の後で B が投票する場合しかない．前者の場合，B の後に来る C, D, E の順列の総数は 6 通りである．同様に後者の場合の C, D, E の順列の総数も 6 通りである．さらに，5 票投票されているのは「A と D」か「A と E」が先に投票しているケースである．A と D が投票している場合の数は「ADBCE, ADBEC, DABCE, DABEC」の 4 通りであり，A と E が投票している場合も同様に 4 通りである．よって B がピボットになる場合の数は $6+6+4+4=20$ 通りである．B と C は対称であるから $\phi_{\mathrm{B}}(\mathcal{W})=\phi_{\mathrm{C}}(\mathcal{W})=\frac{20}{120}=\frac{2}{12}$ である．

A の投票力指数は全体合理性公理から $\phi_{\mathrm{A}}(\mathcal{W})=1-\frac{4}{12}-\frac{2}{12}=\frac{6}{12}$ となる．すなわち全員の投票力指数は $(6/12,2/12,2/12,1/12,1/12)$ となる．票の割合は $4:2:1$ であるにも関わらず，そのパワーは $6:2:1$ となることは興味深い．

次に k を自然数とするとき重み付き多数決ゲーム $[w:q_{\mathrm{A}},q_{\mathrm{B}},q_{\mathrm{C}},q_{\mathrm{D}},q_{\mathrm{E}}]=[5:k,1,1,1,1]$ のシャープレイ・シュービック投票力指数を求めてみよう．

$k=5$ 以上のとき，プレイヤー A は独裁者となるので $\phi_{\mathrm{A}}(\mathcal{W})=1$, $i\neq\mathrm{A}$ に対し $\phi_i(\mathcal{W})=0$ である．

$k=4$ のとき，プレイヤー B がピボットとなるのは，B の前に 4 票集まっているときだけである．すなわち，A の次に B が来たときだけである．その後の C, D, E の 3 人のプレイヤーの順列は 6 通りあるので，$\phi_{\mathrm{B}}(\mathcal{W})=\frac{6}{5!}=\frac{1}{20}$ となる．B,

C, D, E は対称なプレイヤーであるので，$\phi_{\mathrm{B}}(\mathcal{W})=\phi_{\mathrm{C}}(\mathcal{W})=\phi_{\mathrm{D}}(\mathcal{W})=\phi_{\mathrm{E}}(\mathcal{W})=\frac{1}{20}$ となる．さらに全体合理性公理から $\phi_{\mathrm{A}}(\mathcal{W})=1-\frac{4}{20}=\frac{16}{20}$ となる．

$k=3$ のとき，プレイヤー B がピボットになるのは，C, D, E のいずれかと A がプレイヤー B の前に来たときだけである．例えば C が B の前に来る場合の数は「ACBDE, ACBED, CABDE, CABED」の 4 通りとなる．D, E が B の前に来るケースも同様であり，B がピボットになる総数は 12 通りとなる．したがって $i \neq \mathrm{A}$ に対し，$\phi_i(\mathcal{W})=\frac{2}{20}$, $\phi_{\mathrm{A}}(\mathcal{W})=\frac{12}{20}$ となる．

$k=2$ のとき，プレイヤー B がピボットになるのは，A と他のいずれかのプレイヤー 2 人が B の前に来たときだけである．したがってその 2 人の選び方が 3 通りあり，さらにその 2 人と A を含めた 3 人の並べ方は $3!=6$ 通りある．したがって B がピボットとなる順列の数は $6\times 3=18$ となる．したがって $i \neq A$ に対し，$\phi_i(\mathcal{W})=\frac{3}{20}$, $\phi_{\mathrm{A}}(\mathcal{W})=\frac{8}{20}$

$k=1$ のとき，プレイヤーの対称性から，$i \in N$ に対し $\phi_i(\mathcal{W})=\frac{4}{20}$ である．

16.4 国連安全保障理事会における理事国の投票力指数

国連安全保障理事会における各理事国の投票力指数を計算してみよう．2007 年現在の国連安全保障理事会は，拒否権を持つ常任理事国 5 カ国と拒否権を持たない非常任理事国 10 カ国から構成されている．重要案件である実質事項（手続き以外のほとんどの案件は実質事項）の議決のためには常任理事国のすべてと非常任理事国 4 カ国以上の賛成が必要である．この状況を重み付き多数決ゲームで表し，さらに，各国の投票力指数を求めてみよう．現在，国連では数々の修正案が提案されているがその一つの案の投票力指数の計算も試みる．

常任理事国の一つを A とし，非常任理事国の一つを B とする．それぞれの重みを q_{A}, q_{B} としよう．5 つの常任理事国と非常任理事国 4 カ国で可決されることから $5q_{\mathrm{A}}+4q_{\mathrm{B}} \geq w$ が成り立つ．一方 5 つの常任理事国のうちの 4 つとすべての非常任理事国 10 カ国が賛成しても可決できないので $4q_{\mathrm{A}}+10q_{\mathrm{B}} < w$ が成り立つ．この 2 つの不等式を併せると $5q_{\mathrm{A}}+4q_{\mathrm{B}} > 4q_{\mathrm{A}}+10q_{\mathrm{B}}$ すなわち，$q_{\mathrm{A}} > 6q_{\mathrm{B}}$ を得る．$q_{\mathrm{B}}=1$ として q_{A} を求めると $q_{\mathrm{A}} \geq 7$ となる．そこで，それを満たす一つの整数値として $q_{\mathrm{A}}=7$ をとる．この数値の組を代入すると $39 \geq w > 38$ より $w=39$ となる．確かに，重み付き多数決ゲーム $[39:7,7,7,7,7,1,1,\cdots,1]$ は上記の性質を満たしている．

続いて投票力指数を求めよう．B がピボットとなるのはその前に 38 票が集まったときだけである．38 票が集まるのは，すべての常任理事国 5 カ国の 35 票と非常任理事国 3 カ国の 3 票のケースしかない．B を除いた 9 カ国の非常任理事国のうち，3 カ国を選ぶ組合せの数は $\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}=\frac{9!}{3!\cdot 6!}$ である．このように組合せが選ばれた後でのすべての順列の数を求めると，B 国の前の 8 カ国の順列の数 $8!$ と B 国の後の 6 カ国の順列の数 $6!$ から $8!\cdot 6!$ となる．順列の総数は $15!$ であるから

$$\phi_{\mathrm{B}}(\mathcal{W}) = \frac{9!}{3! \cdot 6!} \cdot 8! \cdot 6! \cdot \frac{1}{15!} = \frac{4}{2145} \approx 0.002$$

となる．プレイヤーの対称性からすべての非常任理事国の投票力指数は同じである．一方，常任理事国もすべて互いに対称であるから全体合理性公理と対称性公理より，

$$\phi_{\mathrm{A}}(\mathcal{W}) = \frac{1 - \frac{4}{2145} \times 10}{5} = \frac{421}{2145} \approx 0.196$$

となる．重み付き多数決ゲームとしての表現では，常任理事国の重みは非常任理事国の 7 倍にすぎなかったのに，投票力指数によると常任理事国のパワーは 100 倍に近く，いわゆる 5 大国のパワーだけで全体の 98%を占めている．

国連では近年，常任理事国を何カ国か増加させてはどうかという議論がなされている．その中には常任理事国は増やすが，新常任理事国には拒否権を与えない案などがあるが，日本，ドイツ，インド，ブラジルが共同提案した G4 案では常任理事国 11 カ国，非常任理事国を 14 カ国とし，開始 15 年後に新常任理事国にも拒否権を与えることとしている．非常任理事国の必要な賛成の票数については不明な点もあるので 7 カ国の賛成が必要であるとして，その場合の投票力指数を計算してみよう．上記と同じ議論を適用すると，重み付き多数決ゲームによる表現は，常任理事国に 8 の重みを与え，$[95 : 8, 8, \cdots, 8, 1, 1, \cdots, 1]$ となる．同様な計算により

$$\phi_{\mathrm{B}}(\mathcal{W}) = \frac{13!}{6! \cdot 7!} \cdot 17! \cdot 7! \cdot \frac{1}{25!} = \frac{13}{6 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 25} = \frac{13}{65550} \approx 0.0002,$$

$$\phi_{\mathrm{A}}(\mathcal{W}) = \frac{65368}{65550 \cdot 11} \approx 0.091$$

となる．重みで見ると現行とほとんど変わらないが，常任理事国のパワーは実に非常任理事国の 450 倍以上になる．この重み付き投票制度ではほとんど非常任理事国の影響力はなくなってしまう．

多数のプレイヤーがいる場合の計算方法についてはオーウェンの多重線形展開による方法がある．これに関しては文献 2, 4) などを参照していただきたい．文献 4) はこの分野の専門的な参考文献である．シャープレイ値については，この他にも多彩な応用があるが，紙数の関係で触れることができない．

本回はこの連載の最終回です．長い間，お読み頂きありがとうございました．協力ゲームについては，このほか結婚ゲーム，交渉ゲーム，NTU ゲームなどの興味深い話題がたくさんありますがここでは紹介しきれなかったことが残念です．興味のある方は例えば，文献 2, 3) などを参照してください．

参考文献

1) P. Dubey, "On the Uniqueness of the Shapley Value," *International Journal of Game Theory*, Vol.**4**, pp.131–139, 1975.
2) 船木由喜彦『エコノミックゲームセオリー—協力ゲームの応用』サイエンス社，2001 年.
3) 船木由喜彦『演習ゲーム理論』新世社，2004 年.
4) 武藤滋夫・小野理恵『投票システムのゲーム分析』日科技連出版社，1998 年.

（ふなき・ゆきひこ，早稲田大学政治経済学術院）

ネットワーク科学の方法論と道具論

井庭 崇

1. はじめに：概念・方法・道具

今から十年ほど前，ネットワークに関する新しい概念が2つ提唱された．「スモールワールド・ネットワーク」と「スケールフリー・ネットワーク」の概念である．これらの概念は，その後の研究を方向付け，ネットワーク科学の分野を切り拓くきっかけとなった．「概念」とは物事の捉え方であり，私たちに従来とは異なる現実を見せてくれる．かつて社会学者のタルコット・パーソンズが「概念とはサーチライトである」と表現したとおり，ネットワークの新しい概念も，その光によって，これまで見ることのできなかった現実を捉えることを可能にしてくれた．

このように，科学の営みを振り返るとき，概念の革新に注目が集まることが多いが，実は「方法」や「道具」の知識についても革新が起きているということを忘れてはならない*1)．科学的研究では，「概念」と「方法」と「道具」を駆使して研究が行われている（図1）．そして，それらがお互いに影響し合いながら，それぞれの革新を誘発している．本稿では，このような観点から，ネットワーク科学について再考したい．これにより，いわばネットワーク科学の「科学哲学」を構想し，また，次なる十年を展望することを目指したい．

*1) 「道具」を知識と呼ぶのには抵抗があるかもしれないが，道具は物による知識の具現化であると捉えることができる1)．

2. ネットワーク科学の方法と道具

科学的研究では，様々な方法や道具が用いられるが，本稿では，それらを目的に応じて「調査・観測」，「思考・実験」，「可視化・解析」の3つに分けることにしたい．以下では，ネットワーク科学における「調査・観測」，「思考・実験」，「可視化・解析」の方法・道具について簡単に整理しておく．

2.1 「調査・観測」の方法と道具

ネットワーク科学における「調査・観測」の方法は，対象をどのようにネットワークとして捉えるのかというものである．これには，具現化された関係性を観察によって調べることや，個人の主観的な関係性をアンケートによって調べることなどが挙げられる．「調査・観測」の道具は，インター

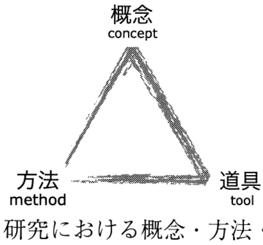


図1 研究における概念・方法・道具．

ネット上から情報を取ってくる「ロボット」(「クローラー」や「スパイダー」と呼ばれる) や，データ形式を変換するプログラムなどである．多くの場合，調べたい対象に合わせて方法が考えられ，道具についても個別に開発されることが多い．

2.2 「思考・実験」の方法と道具

ネットワーク科学における「思考・実験」の方法は，ネットワークについてどのような手段で理解を深めていくのかというものである．具体的には，コンピュータ・シミュレーションのモデルを「つくって動かして理解する」という方法である．「思考・実験」の道具としては，シミュレーションのプログラムなどがこれに当たるが，ネットワーク科学では独自のプログラムを開発することが多いようである．プログラミング言語を使用しなくても，シミュレーションプログラムを開発できるモデリング・ツールもある*2)．

2.3 「可視化・解析」の方法と道具

ネットワーク科学における「可視化・解析」の方法は，ネットワークの構造を捉えたり，ネットワークの特徴を理解するためのものである．具体的には，ネットワークの特徴を表す統計量を算出したり，コミュニティ抽出を行ったりすることなどである[2]．「可視化・解析」の道具は，ネットワークの可視化・解析ツールや統計パッケージなどがある．ネットワーク科学の可視化・解析ツールとして有名なものには，「Pajek」や「Cytoscape」などがある．

3. ネットワーク科学における研究プロセス

今見てきた「概念」・「方法」・「道具」の相互作用について，実際の事例を通して理解することにしたい．ここで取り上げるのは，近年のネットワーク科学の立役者であるダンカン・ワッツとアルバート・ラズロ・バラバシの事例である．それぞれスモールワールド・ネットワークとスケールフリー・ネットワークの概念を生み出し，この分野をリードしてきた．

以下のプロセス分析は，後に本人たちが書いた啓蒙書[3~5]の内容をベースとしており，多少の省略や脚色を含むであろうことに留意しておきたい．それを差し引いても，ワッツとバラバシの事例は，ネットワーク科学で行われている研究プロセスを理解するのに適した魅力的な事例である．なお，プロセス分析のなかで，新しい概念や方法，道具が提案された場合には右矢印 (→) で表現することにする．

3.1 ワッツによるスモールワールド・ネットワークの研究プロセス

ダンカン・ワッツは，スティーブン・ストロガッツのもとでコオロギの同期現象を研究している際に,「6次の隔たり」の話が同期現象に関係があると考えた．「6次の隔たり」とは「誰もがアメリカ大統領と6人の人間を介してつながっている」という話であり，以前父親から聞いた話であった．従来の同期現象モデルでは，振動子は全結合しているか，格子状に結合しているか，ランダムに結合していた．しかしワッツは，その設定が現実と合致しない可能性があると考えた．そこで1996年1月，コオロギの研究を中断し,「秩序とランダム性との中間にある地図のない領域」[4]への冒険を開始した．「われわれの研究は，この『中間領域』に属するネットワークがどんなものかを頭に思い描くことから始まった」[4]と，ワッツは当時を回想している．

ワッツは，社会ネットワークの形成メカニズムの本質について考えた．その結果, 社会ネットワークの背後にある「グループ」の存在と，そのグループ間の「重複」に注目することにした (**→概念**)．そして，このような特徴をもつネットワークかどうかを調べるため,「平均距離」と「クラスタリング係数」の2つの統計量を導入した (**→可視化・解析の方法**)．平均距離はネットワークの大域的な特徴を捉える指標であり，クラスタリング係数は局所的な特徴を捉える指標である．これらの指標

---

*2) 私たち井庭研究室 / PlatBox Project が開発した「PlatBox Simulator」である．このほか，簡単なスクリプトでシミュレーションの構築ができる構造計画研究所「artisoc」などもある．

により，「格子状のネットワーク」と「ランダムなネットワーク」の特徴を理解することができた．

さらに，この極端な2つのネットワークの間の中間領域がどうなっているかを調べるために，コンピュータ・シミュレーションを行った．このときのモデルが，「アルファモデル」と呼ばれるモデルである（**→概念**）．これは「新しい友人をつくるときに人が従う規則という観点から，スモールワールド・ネットワークがどのように生成されるのか」を理解するためのモデルである．シミュレーションプログラムは，プログラミング言語を独習しながらの開発となったため，1カ月ほど苦労してようやく完成した（**→思考・実験の道具**）．シミュレーション分析の結果，局所的なクラスターが存在しながらも，任意のノードが数ステップでつながっている領域があることがわかった．ワッツとストロガッツは，「一見矛盾する二つの特性を備えたこのネットワーク」[4]に「スモールワールド・ネットワーク」と名づけた（**→概念**）．

しかしアルファモデルでは，パラメータ・アルファの値が意味していることが不明確であった．そこで，次につくられたのが「ベータモデル」と呼ばれるモデルである（**→概念**）．このモデルでは，格子状に配置された規則正しいネットワークから，ランダムに「つなぎ換え」を行っていく．このモデルも，シミュレーションによる分析が行われた（**→思考・実験の道具**）．「得られた結果は，目を見張るものだった」[4]と，ストロガッツは語る．ほんの少しの変形だけで，クラスタリング係数はほとんど変化しないのに対して，ネットワークの平均距離は劇的に小さくなったからである．これはまさにスモールワールド・ネットワークの特徴であった．このベータモデルによって，「スモールワールド・ネットワークはとても基本的な力――規則と不規則――の単純な混合によって生じるのであり，混合を仲立ちする特別なメカニズムによって生じるのではない」[3]ということがわかった（**→概念**）．

この結果を受けて，このスモールワールド・ネットワークの仮説を，現実のデータによって検証しようと考えた．まず最初に取り組んだのは，ハリウッドにおける共演者のネットワークである．俳優の共演関係の情報を提供しているウェブサイトの管理者から，その背後にある俳優の関係性のデータを入手した（**→調査・観測の方法**）．20万人を超える俳優のネットワークの平均距離とクラスタリング係数を算出したところ，平均距離が短くクラスタリング係数が高いというスモールワールド・ネットワークの特徴をもっていることがわかった．

同様の検証を，社会ネットワークと異なるデータで行いたいと考え，次は，巨大電力送電システムの研究者から送電ネットワークのデータを入手した．このデータは，電気系の専門的なフォーマットで記録されていたため，何日かかけて，それを扱うことができるようにデータ変換をほどこした（**→調査・観測の方法，道具**）．そして，このネットワークも，スモールワールド・ネットワークの特徴をもっていることがわかった．

さらに異なる種類のデータを求め，今度は線虫（C.エレガンス）の神経ネットワークについても調べた．図書館に収録されていたディスクから，データ変換を経て，ネットワークデータを手に入れた（**→調査・観測の道具**）．そして，このネットワークもスモールワールド・ネットワークであった．

このようにして，全く種類の異なる3つのネットワークが，スモールワールド・ネットワークの条件を満たすことがわかり，この概念が経験的に妥当であることがわかったのである．後に，アルバート・バラバシは，ワッツとストロガッツの発見の最も重要な点は，「クラスタリングは社会的ネットワークだけの特徴ではないことを明らかにしたことである」[5]と述べている．以上のようにして，スモールワールド・ネットワークの概念が形成されたのである．

3.2 バラバシによるスケールフリー・ネットワークの研究プロセス

アルバート・ラズロ・バラバシは，1998年，助手のチョン・ハウンに「ワールド・ワイド・ウェブのマップをつくるようなロボットはできないだろうか」[5]という相談を持ちかけた．ウェブを構成する任意のページの間の距離がどのくらいなのか，そ

して「十億というノードがあっても，ウェブは『小さな』世界になりうるのだろうか？」[5]という問いの答えを考えるためである．そこで，チョンは，まずノートルダム大学内にある30万のページを調べて見取り図をつくるロボットを開発した（**→調査・観測の道具**）．そのデータを解析した結果，ページ間の距離は平均11であることがわかった．いわば「11次の隔たり」ということである（**→概念**）．

1999年当時，ウェブ全体は約8億ページあり，ウェブ全体のマップをつくることはとてもできないということから，統計力学の手法を使って取り組むことにした（**→可視化・解析の道具**）．「もしもウェブが大きすぎてわれわれのコンピュータの手に余るなら，小さな部分をたくさん調べよう」[5]という基本方針のもと，ウェブの部分を取り上げてその内部での距離を求めるということを，対象とするサイズを徐々に大きくしながら行っていった．その結果，「ノード間の距離は，ネットワークのノード数の対数に比例する」という関係性を発見した（**→概念**）．この関係性を利用すれば，ウェブ全体のページ数から平均距離を推定できることになる（**→可視化・解析の方法**）．この方法で推定すると，ウェブの「直径」，つまりノード間平均距離は約19となり，いわば「19次の隔たり」であることがわかった（**→概念**）．

バラバシたちは最初からスケールフリーを予想して，この調査を始めたわけではない．「エルデシュとレーニイの世界観に引きずられていたわれわれは，ウェブページは互いにランダムにリンクされているだろうと考えていた」[5]という．ところが，ロボットが持ち帰ったのは，「大半のノードはわずかばかりのリンクをもつにすぎず，ごく少数のハブが莫大な数のリンクを集めていた」[5]データであった．そこで，リンク数の度数分布を両対数グラフに表してみることにした（**→可視化・解析方法**）．すると，それがべき乗分布になっていることから，「その結果にわれわれは度肝を抜かれた」[5]という．

このときから，「ランダム・ネットワーク理論の予測を裏切らせているのは，ウェブのどんな性質なのだろうか？」[5]という問題に取り組むことになる．バラバシたちは，その数カ月後には，別のデータからもべき乗分布を発見した．ハリウッド俳優のネットワーク，エルデシュの共著関係ネットワーク，細胞内で相互作用する分子のウェブである．バラバシは，このようなネットワークを「スケールフリー・ネットワーク」と名づけた（**→概念**）．

これほど種類の異なるネットワークで，共通して現れる性質というのは，ネットワークの形成に関して，普遍的な法則がはたらいている可能性がある．そこで，考えなければならないのは「ハブやベキ法則はどんなメカニズムで生み出されているのか」[5]という問題であった．そこで，ハブがあるようなネットワークの形成メカニズムのモデル化とシミュレーションを行うことになる（**→「思考・実験」の道具**）．

バラバシは，従来のランダムのモデルの仮定を振り返り，第一にネットワークがすでに存在しているものとして扱われているという仮定と，第二に，すべてのノードが対等だとされている仮定を捨てることを考える．ネットワークは，単に存在しているのではなく，「成長」していると捉えることを考えた（**→概念**）．

成長するネットワークのモデルでは，小さなコア部分から徐々にノードを加えていくというモデル化が考えられた．新しいノードは，すでに存在しているノードの2つとランダムに結合していく．これが，バラバシたちが仮に「モデルA」と呼ぶモデルである．このモデルは，ランダムな結合をするという意味で，ランダム・モデルに近いモデルが，それに「成長」の概念が付け加えられている．シミュレーション結果は，各ノードがもつノード数が均等にはならず，偏る結果となった．古いノードほど，リンクが張られるチャンスが多く，それゆえに獲得リンク数に差が出るのである．

しかし，「コンピュータ・シミュレーションを行った結果，これはまだ答えではないとわれわれは確信した」[5]という．なぜなら，度数分布が指数関数的な減少を示し，べき乗分布にならないからである．「このモデルは，ベキ法則を説明するには

成長という性質だけでは足りないことを明らかにしてくれた」[5]わけである．

そこで，新しいノードを加えるときに，ランダムにノードを選んでリンクを張るというモデル化を，再考することにした．より知られているノードに張る確率が高い，という仕組みである．これが，「優先的選択」と呼ばれるアイデアである（→**概念**）．

このようにバラバシらは，「ジグソーパズルのピースを合わせていくうちに，ネットワークは成長と優先的選択という二つの法則に支配されているという現実が見えてきた」[5] のである．この洞察に基づき，「コンピュータ・シミュレーションを行ったところ，これまでわれわれの手をすり抜けてきたベキ法則がこのモデルによって再現できることが示された」[5]のである．バラバシたちは，「成長」と「優先的選択」のどちらかをはずしてシミュレーションを行い，どちらか一方で説明できないかという実験も行っている（→**「思考・実験」の道具**）．その結果「コンピュータ・シミュレーションと解析的計算から，スケールフリー・ネットワークをつくるためにはどちらの条件も必要であるとの確信を得た」[5]のである．こうして，スケールフリー・ネットワークの概念が形成されたのである．

4. ネットワーク科学の未来への覚書

本稿ではこれまで，ネットワーク科学において，「概念」と「方法」と「道具」がどのように相互作用しながらつくられてきたのかを概観した．ここで，別の観点からネットワーク科学について考えることにしよう．

4.1 何をネットワークとして捉えるのか

まず考えたいのは，「何をネットワークとして捉えるのか」という「対象」の問題である．ここでは，(1) 実在的リンク，(2) 作用的リンク，(3) 主観的リンク，(4) 間接的リンクの 4 つを考えたい．

(1) 実在的リンク

第一に，関係性が何らかの形で具現化もしくは明文化されている場合である．例えば，道路網や電力網は実際にネットワークが建造物として具現化されており，World Wide Web もテキスト間リンクはページ内にハイパーリンクとして明文化されている．このような対象の場合には，その実在する関係性を，ネットワークのリンクとして捉えていくことになる．例えば，国家をノード，同盟をリンクとみなす「国家間同盟のネットワーク」においては，本来は国家間同盟はそれぞれのケースによってその内容や影響力が異なるのであるが，それらを「同盟」であるという抽象的なレベルで捉え，全体を把握することができる[6]．

(2) 作用的リンク

第二に，対象自身にリンクは実在しないが，ノードの間でやりとりが行われている場合に，そのやりとりのフロー（作用）を捉え，それをリンクとして捉えることができる．例えば，地域通貨が実際に取引された主体間をフローをリンクとみなして，ネットワークを描くことができる[7]．また，ある基準を定めて，その基準以上の量のフローがある場合にだけリンクとして捉えるという場合もある．例えば，一定量以上の取引があった銀行間をリンクで結び，銀行間の取引ネットワークを捉えるといったこともできる[8]．

(3) 主観的リンク

第三に，各ノードから見て，相手のノードがある種類の「関係」をもつ相手であると判断される場合に，そのノード間の関係（主観的なリンク）をリンクとして捉える場合がある．都市社会学の分野では，大規模なアンケート調査によってネットワークをあぶり出すということが行われてきた．例えば，ある人から見て相手が「友人」であると思えば，そのノード間に「友人関係」のリンクを張るという方法である．

(4) 間接的リンク

第四に，共起関係などの「隠れた関係性」をネットワークとして捉えるという場合がある．これは，直接的には関係のないものどうしを間接的に結びつけるという方法でネットワークを形成する．例えば，一緒に本を書いた人どうしをネットワークで結ぶ共著者ネットワークや，同一人物を著者に

含む書籍どうしのネットワークが考えられる[9]．Wikipedia において，同じ「キーワード」のハイパーリンクを有するページどうしをリンクで結んだネットワークも考えられる[10]．あるいは，ある顧客が選択した商品どうしをリンクで結んでいくという「商品の選択ネットワーク」というものも考えられる[11]．この選択ネットワークは，アンケートデータの解析などにも応用できるほか[12,13]，「すれ違い」があった人どうしをリンクで結ぶ「すれ違いのネットワーク」なども，同じ原理で描くことができる[14]．

4.2 ネットワークの何を捉えるのか

私の見るところでは，「スモールワールド・ネットワーク」と「スケールフリー・ネットワーク」という空間的構造の概念がインパクトをもたらした時期は，十年経った現在，ほぼ終わったと言えるだろう．これからの十年は，ネットワークの空間的構造の理解ではなく，時間的構造（時系列変化の特徴）の理解に進んでいくと思われる．

動的なネットワークというとき，大きく 2 つの場合に分けることができる．まず第一に，ネットワーク構造が変化する場合である．第二に，ネットワーク上で，動的な変化が起こるという場合である．従来は，この 2 つのダイナミクスは，「ネットワーク構造の変化のダイナミクス」と「ネットワーク上での現象のダイナミクス」として別々に捉えられてきた．しかし今後は，これらが不可分なものとして扱われていくだろう．なぜなら，ネットワークの構造と現象は本来は不可分であるからである．そして，この 2 つのダイナミクスを考えるためには，前節で取り上げたように，リンクの特徴を考える必要が出てくるのである．

5. おわりに

ネットワーク科学の今後はどうなるのであろうか．私の見るところでは，ノードとリンクに抽象化されたレベルではなく，それを一段具象化した「システム」のレベルで議論が展開されることになると思われる．それゆえ，ネットワーク科学は「ネットワーク」の科学にとどまることはできず，システムの科学になる，別の言い方でいうならば，複雑系科学の流れと合流すると私は考えている．その意味で，今後の研究がますます面白くなるに違いない．私も一研究者として，この流れに寄与できればと思う．

参考文献

1) デービス・ベアード：『物のかたちをした知識』，青土社，(2005).
2) 林幸雄（編著），大久保潤，藤原義久，上林憲行，小野直亮，湯田聴夫，相馬亘，佐藤一憲：『ネットワーク科学の道具箱：つながりに隠れた現象をひもとく』，近代科学社 (2007).
3) ダンカン・ワッツ：『スモールワールド・ネットワーク：世界を知るための新科学的思考法』，阪急コミュニケーションズ (2004).
4) スティーヴン・ストロガッツ：『SYNC：なぜ自然はシンクロしたがるのか』，早川書房 (2005).
5) アルバート＝ラズロ・バラバシ：『新ネットワーク思考：世界のしくみを読み解く』，NHK 出版 (2002).
6) 古川園智樹，鈴木祐太，井庭崇：「国家間同盟ネットワークの歴史的変化」，情報処理学会 第 58 回数理モデル化と問題解決研究会 (2006).
7) 西部忠：「地域通貨と地域ドック—苫前町地域通貨流通実験の報告」，『地域政策研究』，No.**34** (2006).
8) 稲岡創，二宮拓人，谷口健，清水季子，高安秀樹：「金融機関の資金取引ネットワーク」，金融市場局ワーキングペーパーシリーズ 2003-J-2，日本銀行金融市場局 (2003).
9) 井庭崇，井庭崇研究室：「SFC から生まれた本のネットワーク」，SFC Open Research Forum 2007 「隠れた関係性の可視化展」(2007).
10) 山崎由佳，伊藤貴一，井庭崇，熊坂賢次：「Wikipedia の経年変化に関するカテゴリ間の比較分析」，情報処理学会第 68 回数理モデル化と問題解決研究会 (2007).
11) 井庭崇，吉田真理子，伊藤諭志：「商品市場分析の新手法：べき乗分布とネットワークによる分析」，情報処理学会第 66 回数理モデル化と問題解決研究会 (2007).
12) 井庭崇，「複雑現象の学習を支援する道具：コンピュータ・シミュレーションを用いた体験と内省」，情報処理学会論文誌：数理モデル化と応用（TOM20）(2008).
13) 井庭崇，湯村洋平，若松孝次，古市奏文：「プロジェクト推進のパターン・ランゲージとその評価」，日本ソフトウェア科学会ネットワークが創発する知能研究会（JWEIN07）& 情報処理学会 数理モデル化と問題解決研究会 第 13 回 MPS シンポジウム合同ワークショップ (2007).
14) 井庭崇，三宅桐子，仲里和：「すれ違いの可知化：RFID を用いた新しいコミュニケーション支援の方法」，情報処理学会第 68 回数理モデル化と問題解決研究会 (2008).

（いば・たかし，慶應義塾大学総合政策学部）

特　集（2008 年 5 月号予告）

物理と数学の難所

理解を深めるキーポイント

本体 952 円

特　集（2008 年 3 月号）

現代物理のための数学キーワード

最先端へのパスポート

本体 952 円

編集後記

今回の特集は昨年 4 月号に続く第 2 弾 “解析編” です．今年は明治維新からちょうど 140 年．それから 21 世紀を迎えた日本は今や大きな科学立国です．画像解析や有限要素法，感染症，ファイナンスなど，巻頭に始まる 10 本の記事には，そんな現代社会を支えるたくさんの数学が交錯しています．目もくらむ華麗な解析学の変奏曲．いつもと違った目で日々を見てみたい方，本特集を通して，社会に聞こえる現代数学の様々な音に耳を傾けてみて下さい．

また，本号から外村彰先生の新連載と新コーナーが始まりました．今後の展開をお楽しみに．　（伊崎）

＊　　＊

今回の特集に関連することですが，だいぶ前に何かの本でマルサスの人口論の話を読んだとき，まさか数学を，それも解析学を使って，人口の増減の話ができるのかと感心した記憶があります．昨今，話題になっている人口問題の話が数学からもアプローチできるわけです．本特集を皮切りに知識を深めていくのはいかがでしょう．

解析学は歴史と共に進歩し，計算機の登場と共にますます進化しています．これからはお互いが切磋琢磨して新たな世界を切り開いていくのだと思います．

今後の発展が楽しみです．　（大溝）

数　理　科　学　4月号

2008 年 4 月 1 日発行　　発行人 木　下　敏　孝

数 理 科 学 編 集 部
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

編集スタッフ
平 勢 耕 介　伊 崎 修 通
大 溝 良 平

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所　ⓒ　株式会社 **サ　イ　エ　ン　ス　社**　TEL. (03) 5474–8500 (代表)
〒 151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600 (広告部)

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁